

LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON EN
PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO

FABIAN ANDRES PIZARRO VILLA
HENRY BOCANEGRA BACCA
OSCAR HERNAN LUCERO POLINDARA

CORPORACION UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE
DIVISION DE INGENIERIA
INGENIERIA ELECTRICA
SANTIAGO DE CALI

2000

LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON EN
PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO

FABIAN ANDRES PIZARRO VILLA
HENRY BOCANEGRA BACCA
OSCAR HERNAN LUCERO POLINDARA

Proyecto de iniciación a la investigación de
Ingeniería Eléctrica.

Directores:

ENRIQUE CIRO QUISPE OQUEÑA
Ingeniero Electricista
DESIDERIO ESPINOZA CHAVARRIA
Licenciado en Matemática

CORPORACIÓN UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE
DIVISIÓN DE INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA
SANTIAGO DE CALI

2000

DEDICATORIA

Consagro esta labor formativa a quienes dan crédito a mi desempeño; gracias a ellos, la meta trazada es ahora una realidad

OSCAR HERNAN LUCERO P.

DEDICATORIA

Este trabajo forma parte de mi preparación como un ser crítico, íntegro y creativo, por lo cual doy un total agradecimiento:

A mis padres Jesús y Sonia

A mi tía Gladys

A mi hermana Patricia, a su esposo Jaime y a mi hermosa sobrina María Del Mar.

Y a todas esas personas que creyeron en este grupo de trabajo.

HENRY BOCANEGRA B.

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a todas aquellas personas que de alguna u otra manera colaboraron para que este trabajo fuera posible, pero en especial a “mi guerrera favorita”, mi abuela que con su ejemplo de constancia, lucha y ayuda desinteresada me fortalece día a día mientras estoy a su lado, para que todo sea posible en este plano existencial.

FABIAN ANDRES PIZARRO V.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no se hubiera llevado a cabo sin el apoyo incondicional de algunas personas, por tanto, damos un reconocimiento de forma sincera a las siguientes personas:

Queremos destacar el nombre del profesor David Fernando Ramírez, quien dedicó parte de su tiempo asesorándonos en los métodos matemáticos y físicos que requiere esta teoría.

También hacemos un reconocimiento muy especial a nuestros amigos y profesores del programa de Ingeniería Eléctrica y Ciencias Básicas, en quienes siempre hemos encontrado el apoyo y la motivación para realizar trabajos de esta envergadura.

De igual importancia, agradecemos a la vicerrectoría de investigaciones, puesto que fueron ellos los que permitieron la elaboración de este documento, brindándonos su apoyo y nos dio la motivación para lograr esta anhelada meta.

TABLA DE CONTENIDO

No.	TITULO.	Pág.
	INTRODUCCIÓN	13
1.	DESARROLLO HISTÓRICO Y FUNDAMENTOS DE LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON	15
1.1	ANTECEDENTES DE LA OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE Y POISSON	15
1.2	OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON EN COORDENADAS RECTANGULARES	27
1.3	TEOREMA DE LA UNICIDAD	33
1.4	TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE A OTRO SISTEMA COORDENADO	37
2.	MÉTODOS MATEMÁTICOS EN LA TEORÍA ELECTROSTÁTICA	40
2.1	EXPANSIÓN MULTIPOLAR DEL POTENCIAL	41
2.2	SERIE DE FOURIER	45
2.3	TEORÍA DE ARMÓNICOS ESFÉRICOS	48

2.4	TEORÍA DE ARMÓNICOS CILÍNDRICOS	56
2.4.1	Funciones De Bessel De Segunda Clase	61
2.4.2	Expansión En Serie De Las Funciones Cilíndricas	68
3.	SOLUCIONES ANALÍTICAS DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE	71
3.1	SOLUCIÓN EN COORDENADAS RECTANGULARES	73
3.2	SOLUCIÓN EN COORDENADAS ESFÉRICAS	76
3.3	SOLUCIÓN EN COORDENADAS CILÍNDRICAS	79
4.	SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON	82
4.1	APLICACIÓN	83
5.	APLICACIONES A LA ELECTROSTÁTICA	87
5.1	PROBLEMA 1	87
5.2	PROBLEMA 2	91
5.3	PROBLEMA 3	94
6.	PERSPECTIVAS DE DESARROLLO EN LA APLICACIÓN A SITUACIONES INGENIERILES	97

7. CONCLUSIONES	109
8. BIBLIOGRAFÍA	111

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	TITULO	Pag.
FIGURA 1.	Generador eléctrico de Guericke.	16
FIGURA 2.	Portada del libro de Robert Boyle sobre ciencia eléctrica.	16
FIGURA 3.	Ensayos experimentales para cargar la botella de Leiden.	17
FIGURA 4.	Retrato de Benjamin Franklin.	18
FIGURA 5.	Dispositivo usado por John Robinson.	20
FIGURA 6.	Electrómetro de Cavendish.	21
FIGURA 7.	Balanza de torsión de Coulomb.	22
FIGURA 8.	Retrato de Simeon Denis Poisson.	23
FIGURA 9.	Retrato de Simon Pierre Laplace.	24
FIGURA 10.	Una superficie Gaussiana	28
FIGURA 11.	Superficie cerrada relativa a problemas Con valor en la frontera	34
FIGURA 12.	Carga localizada en un volumen V	41
FIGURA 13.	Polinomios de Legendre	51
FIGURA 14.	Funciones de Bessel de primera clase	66
FIGURA 15.	Funciones de Bessel de segunda clase	66
FIGURA 16.	Capacitor de placas paralelas con nube de cargas negativas.	83

FIGURA 17.	Caja metálica	87
FIGURA 18.	Recipiente cilíndrico metálico.	91
FIGURA 19.	Esfera metálica	94
FIGURA 20.	Formación del campo magnético en una espira conductora.	98
FIGURA 21.	Circulación del campo magnético en una maquina eléctrica.	99
FIGURA 22.	Elemento amplificado del campo magnético para un semiperiodo en una maquina eléctrica de tipo inductivo.	101
FIGURA 23.	Elemento amplificado del campo magnético en la zona de la ranura con corriente.	102
FIGURA 24.	Campo magnético en las partes frontales de las bobinas.	103
FIGURA 25.	Ranura de rotor de una maquina eléctrica y su representación en elementos finitos triangulares.	107

RESUMEN

En este documento se discute en forma progresiva y lógica el soporte teórico aplicable al cálculo y el análisis de parámetros eléctricos inherentes a los sistemas de potencia (maquinas, líneas de transmisión, solenoides, etc) a partir de principios analíticos desarrollados sobre las ecuaciones de Laplace y Poisson.

INTRODUCCIÓN

En el transcurso de los días, las matemáticas han adquirido mayor importancia en las ciencias de la ingeniería y es fácil suponer que esta tendencia continuará en el futuro. Una razón importante para ello es que los problemas de la ingeniería moderna son tan complejos que en su mayoría no pueden resolverse simplemente sobre la base de la intuición física y la experiencia pasada. Este método empírico de resolución, que tuvo tanto éxito para muchos problemas, falla tan pronto intervienen condiciones anormales y la situación se vuelve más crítica debido al hecho de que varios materiales modernos (plásticos, aleaciones, etc.) tienen propiedades físicas no usuales. El trabajo experimental se hace complicado, tardío y costoso. En tales casos, las matemáticas ayudan a plantear las construcciones y los experimentos y valorar los datos experimentales. Los métodos matemáticos que inicialmente se desarrollaron por razones puramente teóricas, repentinamente adquieren gran importancia en las matemáticas aplicadas a la ingeniería. Ejemplo de ello es la teoría de las ecuaciones diferenciales que tienen soluciones periódicas. Tópicos estudiados en forma detallada en este documento.

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son ecuaciones diferenciales parciales de notable importancia en las matemáticas de ingeniería puesto que, han motivado desarrollos teóricos en más de un campo del conocimiento humano, en especial en áreas donde el análisis apunta a los fenómenos eléctricos. Allí, se aplican tales ecuaciones para dar solución a una gran variedad de problemas del

electromagnetismo, en los que las condiciones de frontera, del sistema en estudio, determinan soluciones particulares con las cuales poder hacer predicciones sobre el comportamiento de un sistema en particular.

Puesto que la tarea de resolver las ecuaciones de Laplace y de Poisson es un ejercicio matemático, se debe tener bien comprendidos los conceptos del electromagnetismo, para no perder el significado físico y poder hacer las conclusiones pertinentes.

Se pueden considerar dos tipos de problemas, en el primer caso tenemos en cuenta regiones con carga espacial presente y se obtiene una solución a la *ecuación de Poisson* . En el segundo caso no hay carga espacial y se busca la solución a la *ecuación de Laplace*, que satisface las condiciones de frontera.

1.1 DESARROLLO HISTORICO Y FUNDAMENTOS DE LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON

La humanidad en su imperativo deseo de conocer su medio circundante, se ha interesado por ciertos fenómenos naturales llamados eléctricos. Cronológicamente, los primeros registros que se tienen sobre estos, datan de por lo menos 600 años A.C. siendo por ese entonces el filósofo griego Tales de Mileto, el primero en observar las propiedades eléctricas del ámbar (conocido por ellos como *elektron*), al cual se le encontró la capacidad de atraer plumas, hilos o pelusa cuando fue frotado con un trozo de piel. Sin embargo, como el interés de los Griegos se centró mas en la filosofía y en la lógica, que en las ciencias experimentales, tuvieron que pasar muchos siglos para que el efecto de atracción y repulsión dejara de ser considerado como un truco de magia o fuerza vital, para ser considerado como un fenómeno físico real.

Dentro de los primeros aportes desarrollados y publicados en el campo de la electricidad se pueden destacar los realizados por personas tales como, el ingles William Gilbert; que en el año de 1600, fue el primero que realizo un verdadero trabajo experimental en este campo, el cual fue plasmado en su libro *De Magnete*, donde presentó una larga lista de materiales que podían ser electrizados; junto con un procedimiento para analizar los fenómenos físicos por medio de una serie de pasos; aproximándose en gran parte, a lo que se conoce hoy día, como método científico. Dentro los aportes destacados que prosiguieron a esta fecha, cabe mencionar la construcción de un generador eléctrico, realizada por Otto von Guericke (1602 –1686). El generador fabricado era un globo de azufre con un eje que podía girar en las chumaceras, tal como se muestra en la figura 1. Cuando este se hacía girar manteniendo una mano seca sobre el globo, se inducía una carga eléctrica en la superficie, notándose una pequeña chispa cuando el globo se

descargaba. el reporte sobre este valioso trabajo fue hecho en *Experimenta Nova* en el año de 1672.



FIGURA 1. *Generador eléctrico de Guericke*

Tres años mas tarde en 1675 el ingles, Robert Boyle publicó sus numerosos resultados experimentales con la electricidad en vacío; en un libro sobre ciencia eléctrica, cuya portada se muestra en la figura 2.

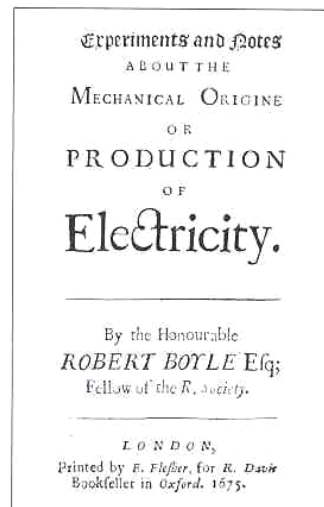


FIGURA 2. *Portada del libro de Robert Boyle sobre ciencia eléctrica.*

Finalmente se puede destacar el aporte, del inventor francés J.T. Desaguliers, que estimo en 1740, que se llamasen *conductores* a las sustancias a cuyo través circulaba libremente el fluido eléctrico; como en el caso de los metales y *aislantes*, a aquellas a cuyo través no podía circular fácilmente el fluido, como acontece con el ámbar.

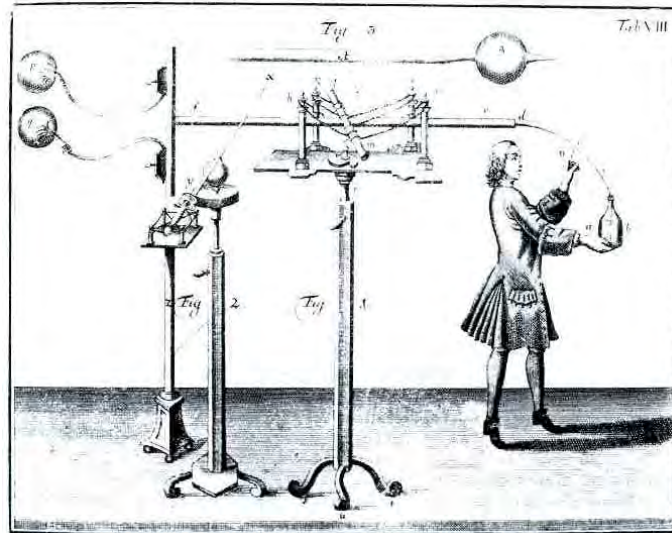


FIGURA 3. Ensayos experimentales para cargar la botella de Leiden.

Desarrollos posteriores permitieron a los experimentadores observar que se podía acumular gradualmente una gran carga eléctrica en un conductor, si se le aislaba con vidrio o con una capa de aire para evitar la perdida de electricidad. Así fue como se invento el instrumento que lleva por nombre *la botella de Leiden*, el cual permitió plasmar las observaciones hechas hasta ese entonces. Esta botella fue ideada en 1745, por el profesor alemán E. Georg von Kleist, pero físicamente reproducida y ensayada por vez primera, por el profesor Peter van Musschenbroek en la universidad de Leiden (Holanda); como se observa en la figura 3. Este invento prácticamente se puede considerar como una replica primitiva de lo que hoy día se conoce como *capacitor*, ya que la botella se encuentra conformada, por dos

superficies conductoras separadas por una capa aislante de poco grosor, y en cuyo interior se puede almacenar cierta cantidad de carga eléctrica. Cuando la botella se descarga se produce naturalmente una chispa originada por la radiación resultante de las colisiones entre innumerables electrones y moléculas del aire; acompañada por un ruido motivado por la expansión de aire que se calienta rápidamente, seguida por la irrupción de aire más fresco en el momento del vacío parcial. Naturalmente a raíz de estos sucesos, algunos científicos de la época trataron de establecer una analogía; al preguntarse sí el rayo y el trueno corresponderían a un fenómeno similar, aunque de proporciones mucho mayores, al pequeño espectáculo presentado por la botella de Leiden. De los adeptos a esta idea, aparece un erudito británico, llamado William Wall, quien en 1708 estructura y postula esta hipótesis; la cual se convierte en incentivo suficiente para que en 1752, Benjamin Franklin (1706 - 1790) (quien se muestra en la figura 4), realice su famoso experimento. Dicho experimento consistió en hacer volar una cometa en medio de una borrasca, donde la cometa llevaba un alambre puntiagudo; al cual se unió un hilo de seda con el propósito de conducir hacia abajo (tierra), la electricidad de las nubes tormentosas. Prosiguiendo con el experimento; Benjamín Franklin acercó su mano a una llave metálica que se



FIGURA 4. Retrato de Benjamin Franklin

encontraba unida al hilo, pero esta soltó chispas; así entonces el la cargo de nuevo; para después emplearla en cargar la botella de Leiden; consiguiendo así una carga idéntica a la obtenida por otros procedimientos. Demostrando de esta forma que las nubes tormentosas estaban cargadas de electricidad, y que tanto el trueno como el rayo eran los efectos de una "botella de Leiden celeste", en la cual un polo lo constituyen las nubes y el otro la tierra. Mas adelante el mismo Franklin; gracias a los resultados experimentales obtenidos consiguió una importantísima aplicación practica; el *pararrayo*, al igual que llevo a obtener conclusiones teóricas de gran significancia en el estudio de la electricidad; dentro de las cuales Franklin menciona en primera instancia, que los fenómenos eléctricos observados se deben a dos diferentes fluidos o cargas eléctricas; que bautizo con el nombre de positiva y negativa. También se permitió explicar, que cuando se frota un cuerpo contra otro no se crea carga en el proceso; Por lo cual, un cuerpo gana cierta cantidad de carga negativa mientras que el otro gana la misma cantidad de carga pero positiva, lo que sugiere que la carga eléctrica siempre se conserva.

Después de los aportes hechos por Franklin, el estudio sobre la electricidad había tomado mas auge e importancia; centrándose ahora el interés, en las fuerzas producidas entre las cargas eléctricas. Es así como en 1769, el Dr. John Robinson (1739 –1805) de Edinburgh, logro determinar la fuerza entre dos cargas, mediante un experimento directo a través de un dispositivo articulado mecánicamente; (mostrado en la figura 5), siendo sus investigaciones científicas recopiladas y publicadas posteriormente en cuatro extensos volúmenes titulados "*Mechanical Philosophy*", en el año de 1822 en Edinburgh. Siguiendo este mismo derrotero, aparece en el año de 1773 Henry Cavendish (1731 – 1810); quien experimenta de

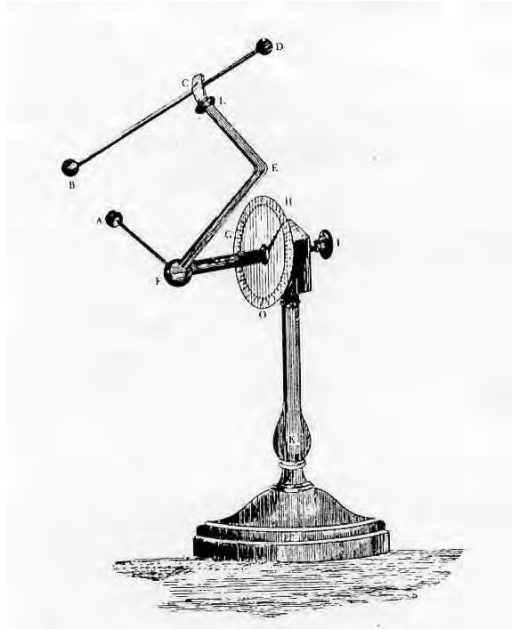


FIGURA 5. *Dispositivo usado por John Robinson.*

manera semejante a como la hizo Franklin, pero de una forma más clara la fuerza existente entre dos cargas. Es conveniente recalcar que las técnicas de laboratorio usadas por Cavendish dieron resultados formidables; que han producido la admiración de los experimentadores más modernos; resultados obtenidos en gran parte a la buena detectabilidad del electrómetro utilizado; el cual se muestra en la figura 6. Dentro de sus aportes teóricos, Cavendish introdujo el concepto de "*grado de electrificación*" (termino actualmente conocido como *potencial*); también argumentó, que cuando dos conductores están cargados, la carga se distribuye en ellos de manera ordenada;

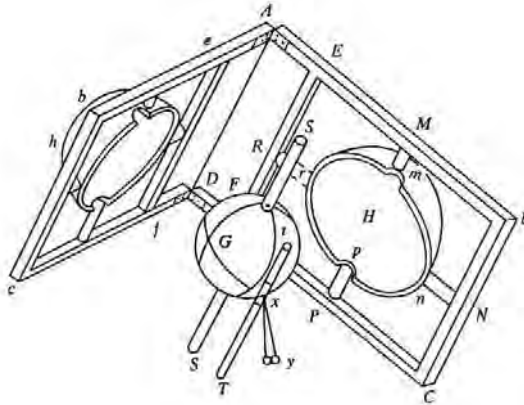


FIGURA 6. *Electrómetro de Cavendish*

constituyendo así el potencial. Estos resultados fueron incorporados por muchos investigadores para comparar la carga de dos cuerpos, cuando estos llegan a un *potencial común*. Otro aporte importante de Cavendish, se dio cuando hizo un razonamiento semejante al realizado por Isaac Newton, para el caso de la atracción gravitatoria; asumiendo que las cargas eléctricas pueden distribuirse uniformemente sobre una esfera, y cada elemento cargado puede ejercer fuerzas sobre todos los otros elementos, (en concordancia a la misma ley de Newton); lo cual permitió aplicar el principio de superposición para el caso eléctrico.

En general los resultados de Henry Cavendish fueron altamente originales y sus experimentos definitivos; mas no publicados; razón por la cual la comunidad científica no conoció su trabajo hasta luego de una centuria, de manera semejante a lo ocurrido con los resultados experimentales de John Robinson. Lo anterior trajo como consecuencia un desconocimiento general de los desarrollos realizados por estos hombres, que establecieron la ley del cuadrado inverso; pero cuyo crédito y fama fueron acreditados a otra persona.

Otro investigador fue Augustin de Coulomb (1736 –1806), quien a su vez en 1785, también demostró la ley de las fuerzas eléctricas; pero usando una técnica totalmente diferente, a la empleada por sus predecesores; sin embargo su método tiene un grado de exactitud similar al dado por Cavendish, aunque más directo y cuantitativo. Sus procedimientos envuelven el uso de una balanza de torsión inventada por el mismo, la cual se presenta en la figura 7. Con esta balanza, Coulomb se permitió medir la

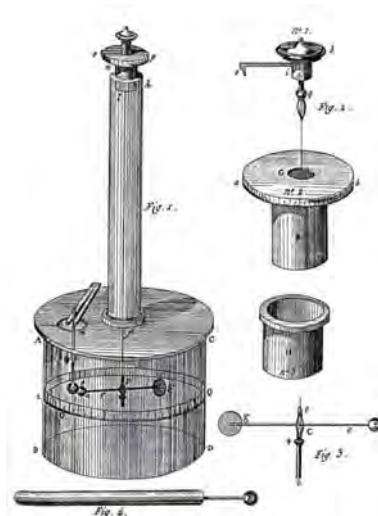


FIGURA 7. Balanza de torsión de Coulomb

fuerza repulsiva entre dos cargas iguales; valiéndose en que la fuerza eléctrica entre estas, producía una torsión en un alambre o fibra que sostenía a la barra o balanza en suspensión; que a su vez tenía una de las cargas eléctricas. Como el momento de la fuerza de restitución de la fibra es proporcional al ángulo que describe al girar la balanza; una medida de este ángulo, le permitió obtener un valor cuantitativo de la fuerza eléctrica de repulsión para este y otros casos. Este descubrimiento le permite también investigar la manera cómo la cantidad de carga eléctrica afecta la fuerza eléctrica; al igual que obtener la primera base cuantitativa para establecer matemáticamente la ley de la fuerza eléctrica. La explicación del método y

procedimientos desarrollados por Coulomb, se encuentran en su artículo contenido en "*First Memoir on Electricity and Magnetism*", lo que le permite ser el primero en publicar y distribuir sus resultados con relación a este tema; resultados que son rápidamente aceptados por el mundo científico.

Dicha aceptación fue en buena parte promovida por las contribuciones teóricas de Simeon Denis Poisson (1781 – 1840) (cuyo retrato se muestra en la figura 8) quien, presentó dos brillantes memorias acerca de la teoría electrostática en los años 1812 y 1813; memorias que llevaron por título "*On the Distribution of Electricity at the Surface of Conducting Bodies*", en las cuales se muestra, la aceptación de la ecuación de Coulomb como postulado fundamental; la cual expresa que las cargas eléctricas ejercen fuerzas una sobre otra, ya sean de atracción o de repulsión; donde dicha fuerza varía directamente al producto de las cargas presentes e inversamente al cuadrado de la distancia que las separa; dándosele por nombre a este postulado *la ley del cuadrado inverso*, postulado que presenta una gran analogía con la teoría de la gravitación universal.



FIGURA 8. Retrato de Simeon Denis Poisson

Tiempo atrás en el año de 1777, en un artículo publicado en *Mémoires de Berlin*, Lagrange había mostrado para el caso gravitacional, que si una función $\psi(x,y,z)$ se forma por la adición conjunta de todas las masas de las partículas de un sistema de atracción, cada una dividida por su distancia de separación, entonces las derivadas de esta función serán iguales a las componentes de la fuerza de atracción. Con relación en esta deducción Simon Pierre Laplace (1749 - 1827) (cuyo retrato aparece en la figura 9), demuestra en 1785 en su trabajo "*Theory of Attractions of Spheroids*" que la función ψ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

donde todos los puntos no se encuentran ocupados por masa. Esta ecuación fue llamada ecuación de Laplace, como tributo a su obtención.

Por otra parte es importante anotar que tanto Lagrange como Laplace, tuvieron una marcada influencia sobre Poisson ya que estos dos además de ser sus profesores, fueron sus amigos de toda la vida.

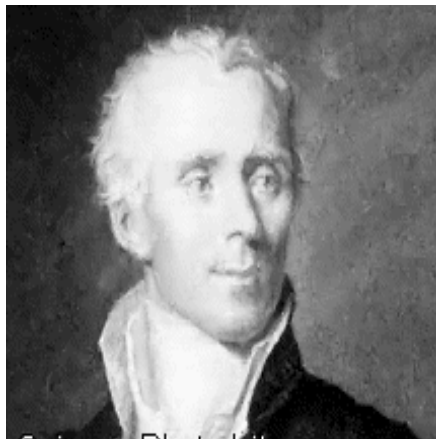


FIGURA 9. Retrato de Simon Pierre Laplace

Como se había referenciado anteriormente, el principio central de Poisson, partió de la suposición de la ley del cuadrado inverso de Coulomb, la cual fue la base, para el introducir la función $\Phi(x,y,z)$, que posteriormente, George Green; daría el nombre de *potencial*. Dicha función está compuesta por la suma de las cargas de un sistema eléctrico; donde cada carga esta dividida por su distancia de separación. De esta forma Poisson, al igual que Lagrange lo había hecho en el caso de la atracción gravitacional, derivó la siguiente expresión

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

obteniendo de esta manera las componentes de la fuerza eléctrica en x , y y z .

Posteriormente a partir del principio estipulado, en el cual un conductor cargado debe ser un equipotencial, Poisson logra deducir la distribución superficial para varias figuras simples, incluyendo entre ellas un elipsoide; así extiende su análisis al estudio de dos cargas esféricas ubicadas a cualquier distancia una de la otra. Este estudio se convirtió en un problema clásico y complejo; para el cual dedico tres cuartos mas del espacio ocupado por sus dos largas memorias en su solución; que involucra funciones Gamma dobles y simples, dependiendo de sí las esferas están o no en contacto. De esta forma Poisson calculó laboriosamente, los valores de sus integrales para una amplia variedad de condiciones y exhibió un acercamiento muy satisfactorio con los tempranos resultados experimentales de Coulomb.

Hacia el año de 1813, Poisson consigue una de las contribuciones más significativas para la ciencia, cuando en una breve nota, extendió la ecuación de Laplace incluyendo los puntos ocupados por masa, obteniendo así para el sistema Gaussiano la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

conocida como *la Ecuación de Poisson*, donde ρ es la densidad volumétrica de la masa; existiendo análogamente la misma conexión entre el potencial eléctrico y la densidad de carga.

1.2 OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON EN COORDENADAS RECTANGULARES

Para obtener las ecuaciones de Laplace y Poisson, es necesario utilizar algunas relaciones matemáticas importantes, que serán deducidas a través de la aplicación de la *ley de Gauss* en forma integral, a un problema en particular.

$$(1) \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

La aplicación de la ley de Gauss a un problema, resulta sencilla cuando la distribución de carga tiene gran simetría, debido a que la integración no presenta dificultad alguna si se selecciona una superficie cerrada adecuada. Sin embargo, si el problema a analizar no posee simetría alguna, el efecto generado es la imposibilidad de elegir una superficie gaussiana simple, y por consiguiente no posibilita la evaluación de la integral de superficie. Para solucionar este inconveniente, se elegirá una superficie muy pequeña cerrada donde la *densidad de flujo eléctrico* \vec{D} sea casi constante sobre la superficie, además el resultado buscado será mejorado a medida que el volumen encerrado por la superficie gaussiana disminuya en lo mayor posible. Es conveniente aclarar, que el resultado buscado inicialmente en este problema en particular, para la posterior obtención de las ecuaciones de Laplace y Poisson, no está encaminado a encontrar el valor de la densidad de flujo eléctrico \vec{D} sino a la manera en que varía esta densidad de flujo eléctrico en la región de la pequeña superficie elida.

El problema a tratar se ubica en un sistema de coordenadas cartesianas, en el cual se considera un punto P , donde el valor de la densidad de flujo eléctrico \vec{D} en ese punto, expresado en componentes cartesianas es, $\vec{D}_0 = D_{x0}\hat{a}_x + D_{y0}\hat{a}_y + D_{z0}\hat{a}_z$.

La superficie gaussiana elegida es un pequeño cubo que se encuentra centrado en P , cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados y cuyas longitudes de los lados son ΔX , ΔY y ΔZ como se muestra en la figura 6.

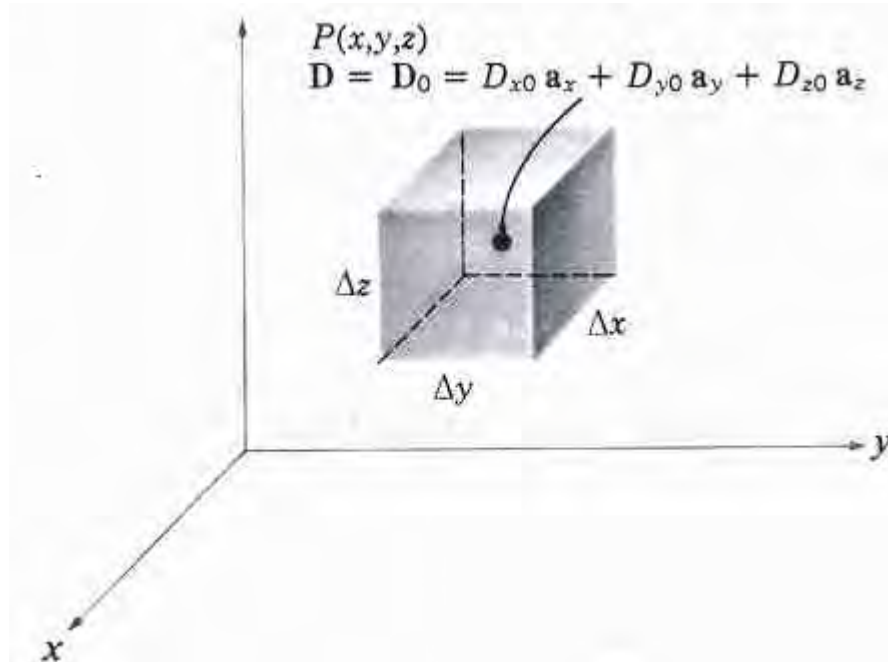


FIGURA 10: Una superficie gaussiana de tamaño diferencial alrededor del punto P se usa

para investigar la razón de cambio espacial de D en la vecindad de P .

Ahora se procede a aplicar la ley de Gauss (1), para evaluar la integral de superficie cerrada, para lo cual se divide esta integral en seis integrales de superficie que corresponde cada una, a la respectiva cara del pequeño cubo,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_4} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_5} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_6} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Considerando que el elemento de superficie S_i es muy pequeño, se tiene entonces una densidad de flujo eléctrico \vec{D} casi constante sobre esta cara del cubo, por

consiguiente la integral de superficie para S_1 se puede aproximar como,

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \vec{D}_{S_1} \cdot \Delta Y \Delta Z \hat{a}_x \cong D_{x,S_1} \Delta Y \Delta Z$$

Ahora, para obtener el valor aproximado de D_{x,S_1} en la superficie S_1 se usa el termino constante y el termino que involucra la primera derivada del desarrollo de la *serie de Taylor* para D_x en la vecindad de P. Por lo cual se tiene,

$$D_{x,S_1} \cong D_{x0} + \frac{\Delta X}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

entonces,

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \left(D_{x0} + \frac{\Delta X}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta Y \Delta Z$$

haciendo consideraciones semejantes para la superficie S_2 , la integral se puede aproximar así,

$$\int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \vec{D}_{S_2} \cdot (-\Delta Y \Delta Z \hat{a}_x) \cong -D_{x,S_2} \Delta Y \Delta Z$$

y como,

$$D_{x,S_2} \cong D_{x0} - \frac{\Delta X}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

entonces,

$$\int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \left(-D_{x0} + \frac{\Delta X}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta Y \Delta Z$$

sumando ahora las integrales para las superficies S_1 y S_2 se tiene,

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

Aplicando un procedimiento semejante entre las superficies S_3 , S_4 y S_5 , S_6 se obtiene,

$$\int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_4} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

$$\int_{S_5} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{S_6} \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

Por los desarrollos anteriores la integral de superficie cerrada se puede aproximar como sigue,

$$(2) \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

donde $\Delta V = \Delta X \Delta Y \Delta Z$ y corresponde al elemento de volumen encerrado por la superficie gaussiana.

Ya se ha mencionado con anterioridad, que si se quiere que el resultado obtenido en la relación (2) sea más exacto, se necesita que el elemento de volumen ΔV sea lo más pequeño posible (que tienda a cero). Escribiendo de nuevo (2) tenemos,

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \cong \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V}$$

haciendo que ΔV tienda a cero,

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta V}$$

donde se puede evidenciar que el ultimo termino de esta expresión, corresponde a la *densidad de carga volumétrica* (ρ_v), por lo que,

$$(3) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \rho_v$$

Sin tener en cuenta la densidad de carga volumétrica. Si se analiza detenidamente el lado derecho de la expresión (3), se reconoce que esta expresión representa el limite de la cantidad de flujo eléctrico por unidad de volumen que sale del pequeño cubo cerrado cuando el volumen tiende a cero, lo que se traduce como la *divergencia del vector densidad de campo eléctrico*, por lo cual,

$$(4) \quad \text{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

o también,

$$(5) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

La anterior expresión se obtuvo a razón de que el elemento diferencial de volumen se trabajó para coordenadas Cartesianas, en caso tal de haber elegido el volumen diferencial en coordenadas Cilíndricas o Esféricas; las expresiones obtenidas para dichas divergencias se encontrarán en términos del sistema de coordenadas elegido.

Estableciendo una nueva relación entre la densidad de carga volumétrica ρ_v de (3), y la divergencia del vector densidad de campo de (5), se obtiene,

$$(6) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$$

esta expresión es una de las *ecuaciones de Maxwell*, llamada también *forma puntual de la ley de Gauss*, y establece que el flujo eléctrico por unidad de volumen que sale de un pequeño volumen unitario es exactamente igual a la densidad de carga volumétrica que existe en dicho volumen.

Por otra parte, en un medio isotropico se tiene,

$$(7) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

combinando las ecuaciones (6) y (7) se obtiene,

$$(8) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

En un campo puramente electrostático, \vec{E} puede expresarse como menos el gradiente del potencial Φ ,

$$(9) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

ahora reemplazando (9) en (8), se obtiene,

$$(10) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = -\frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

donde la divergencia del gradiente se puede expresar como un solo operador diferencial escalar llamado *laplaciano de Φ* ,

$$(11) \quad \vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación diferencial es conocida como la *ecuación de Poisson*, donde el laplaciano hace referencia a un sistema de coordenadas en particular según el problema electrostático que se esté resolviendo.

Se debe tener presente que en algunos tipos de problemas electrostáticos, toda la carga se encuentra ya sea sobre la superficie de los conductores o en forma de cargas puntuales fijas (sujetas a regiones limitadas). En estos casos, la densidad de carga en la mayoría de los puntos del espacio es cero $\rho_V = 0$, y la ecuación de Poisson se reduce a,

$$(12) \quad \vec{\nabla}^2 \Phi = 0$$

conocida como la *ecuación de Laplace*. En coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional, esta ecuación tiene la siguiente forma

$$(13) \quad \vec{\nabla}^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

1.3 TEOREMA DE LA UNICIDAD

Una vez obtenida una solución de un problema de campo electrostático (por el medio que sea), es importante saber que sea la única solución posible. El modelo matemático que proporciona la teoría del potencial sería poco útil si diera varias soluciones a un problema dado, entre las cuales tendría que verificarse el resultado correcto del problema físico mediante experimentación o alguna otra manera.

Se puede demostrar que las soluciones de potencial de las siguientes clases de problemas de valor en la frontera son únicas:

1. El problema de Dirichlet. Una solución a la distribución del potencial $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ de la ecuación de Laplace es única si Φ satisface una solución especificada de frontera.

$$(14) \quad \Phi = \Phi_S(u_1, u_2, u_3)$$

en el límite cerrado S de la región.

2. El problema de Neumann. Una solución a la distribución del potencial $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ de la ecuación de Laplace es única dentro de un valor constante si la derivada normal de Φ satisface una condición especificada de frontera

$$(15) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S$$

en el límite cerrado S de la región.

3. El problema del valor de límite mezclado. Una solución a la distribución del potencial de la ecuación de Laplace es única si satisface (14) en una parte de S , y (15) en la restante.

Se puede tener una demostración de (14) suponiendo que hay dos soluciones, Φ y Φ' , cada una de las cuales satisface la ecuación de Laplace ($\nabla^2\Phi = 0$ y $\nabla^2\Phi' = 0$) en todas partes dentro del volumen V limitado por la superficie cerrada S que se muestra en la figura 11, cumpliendo a su vez ambas con las mismas condiciones de Φ_s de la frontera como sigue:

$$(16) \quad \Phi = \Phi' = \Phi_s(u_1, u_2, u_3) \quad \text{en } S$$

En general, la condición de frontera especificada $\Phi_s(u_1, u_2, u_3)$ es una función de la posición en S .

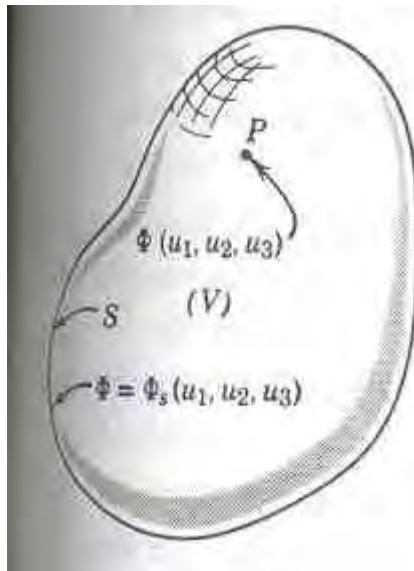


Figura 11: Superficie cerrada relativa a problemas con valor en la frontera

Para algunos problemas, S puede estar formado por varios (n) conductores como lo muestra la figura 11, en que la condición de frontera (16) es una secuencia de los potenciales $\Phi_{S1}, \Phi_{S2}, \dots, \Phi_{SP}$ en las superficies respectivas S_1, S_2, \dots, S_n . De (16), la diferencia de las dos condiciones idénticas de frontera es cero, es decir,

$$(17) \quad \Phi - \Phi' = 0 \quad \text{en } S$$

Se establece el carácter único de Φ si también se demuestra que $\Phi - \Phi' = 0$ en V . Con este fin, la primera identidad integral de Green

$$(18) \quad \oint_S (g \nabla f) \cdot d\vec{s} = \int_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] dV$$

tiene la forma equivalente verdadera para cualquier par de funciones bien comportadas f y g .

$$(19) \quad \int_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] dV = \oint_S (f \nabla g) \cdot d\vec{s} = \oint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS$$

En consecuencia, debe de ser válida si $f = g$, e igualmente para $f = \Phi - \Phi'$, la diferencia de las funciones que se están examinando para determinar su carácter único. Como está última, la identidad de Green toma la forma

$$(20) \quad \int_V \left\{ (\Phi - \Phi') \nabla^2 (\Phi - \Phi') + [\nabla(\Phi - \Phi')]^2 \right\} dV = \oint_S (\Phi - \Phi') \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right] dS$$

Con Φ y Φ' satisfaciendo la ecuación de Laplace, se sigue evidentemente que $\nabla^2(\Phi - \Phi') = 0$, lo que hace que desaparezca el primer término de la integral de volumen de (20), para obtener

$$(21) \quad \int_V [\nabla(\Phi - \Phi')]^2 dV = \oint_S (\Phi - \Phi') \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right] dS$$

Debido a que (17), la integral de superficie de (21) es cero, para obtener

$$(22) \quad \int_V [\nabla(\Phi - \Phi')]^2 dV = 0$$

El integrando es una cantidad al cuadrado y por tanto, es positivo en todas partes en V . Por ende la única manera de que la integral de una función no negativa sea cero, como se indica, es que el integrando sea cero en todas partes dentro de V ; en consecuencia, $\nabla(\Phi - \Phi') = 0$. Un gradiente cero significa que $\Phi - \Phi'$ no puede cambiar con respecto a cualquier dirección en V , lo que hace

$$(23) \quad \Phi - \Phi' = \text{constante en } V$$

incluso el valor de esta constante es cero en el problema de Dirichlet, con referencia a la condición de frontera (4). Por tanto, $\Phi = \Phi'$, establece el carácter único de Φ en el problema de Dirichlet, lo que conlleva que el campo \mathbf{E} sea único, ya que

$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$

siendo este, el principio de la unicidad en electrostática.

El carácter único de la solución Φ para el problema de Neumann, se establece esencialmente de la misma forma, observando que cada solución Φ y Φ' debe satisfacer la misma condición de frontera (2), lo cual hace que el factor $\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \frac{\partial\Phi'}{\partial n}$ en presencia de la integral de superficie de (21) sea igual a cero.

En la demostración dada, se supuso la presencia de un dieléctrico aislante homogéneo con permeabilidad ϵ para V . Así, el carácter único de las soluciones es válido aunque esté presente un dieléctrico no homogéneo (ϵ una función de posición), al igual que para dieléctricos particionados en varias regiones homogéneas con distintos valores de ϵ . Aunque esta demostración no se de aquí, se sigue subdividiendo a V mediante superficies que estén justo a ambos lados de los medios en contacto.

1.4 TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE A OTRO SISTEMA COORDENADO

En muchos problemas que conducen a la ecuación de Laplace, se requiere resolver un problema con valor en la frontera, es decir, determinar la solución de (12) que satisfaga determinadas condiciones en la frontera sobre ciertas superficies. Entonces, es necesario introducir coordenadas en el espacio de modo que estas superficies puedan representarse en una forma sencilla. Esto requiere la transformación del laplaciano (13) en otros sistemas coordenados. Por ello, a continuación se considerarán las transformaciones de la expresión diferencial (13) a los otros sistemas coordenados de notable importancia. Teniendo en cuenta las coordenadas cilíndricas ρ , ϕ y z

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Realizando el siguiente desarrollo matemático se llega al laplaciano en coordenadas cilíndricas. Aplicando la regla de la cadena al primer término de la derecha de la ecuación (13), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

derivando esta expresión respecto a x se llega a

$$(24) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Ahora, aplicando nuevamente la regla de la cadena, al primer y tercer termino de la derecha, de la ecuación anterior, se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Recordando que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y que $\phi = \arctag \frac{y}{x}$ es posible determinar las derivadas

parciales $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{\rho^2}$$

derivando otra vez estas expresiones, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{x^2}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2xy}{\rho^4}$$

sustituyendo todas estas expresiones en (24), aplicando y simplificando, se encuentra rápidamente

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{y^2}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

en forma similar se obtiene

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{y^2}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

y para la variable z cuya dependencia es intrínseca, se encuentra

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

sumando las tres expresiones anteriores resulta que el laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$(28) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

De manera semejante es posible encontrar el laplaciano en coordenadas esféricas, la cual tiene la siguiente forma

$$(29) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

2. MÉTODOS MATEMÁTICOS USADOS EN LA TEORÍA ELECTROSTÁTICA

La comprensión analítica de algún fenómeno u objeto está comúnmente precedida por dos etapas. La primera consiste en correlacionar hechos con símbolos matemáticos y la segunda etapa está basada en la solución del esquema matemático que interconectó estos símbolos de una manera precisa y consistente. A este esquema se le llama usualmente modelo matemático.

De igual forma la solución de estos modelos fundamentados en las definiciones claras y en las conexiones no ambiguas conlleva al empleo de herramientas teóricas. Por tal motivo en este capítulo se hará énfasis en las teorías *de Desarrollo Multipolar del Potencial, Series de Fourier, Armónicos Esféricos y Armónicos Cilíndricos*.

2.1 EXPANSIÓN MULTIPOLAR DEL POTENCIAL

Considerar el caso de un sistema de distribución de carga arbitraria. Para reducir el número de coordenadas de posición, se considerará una distribución de carga en la vecindad del origen de coordenadas. Una restricción más será que la distribución de carga puede estar encerrada completamente en una esfera de radio a , que es pequeño comparado con la distancia al punto de observación. Un punto arbitrario dentro de la distribución de carga se designará con r' , la densidad de carga en ese punto con ρ' y el punto de observación con r (ver figura 12).

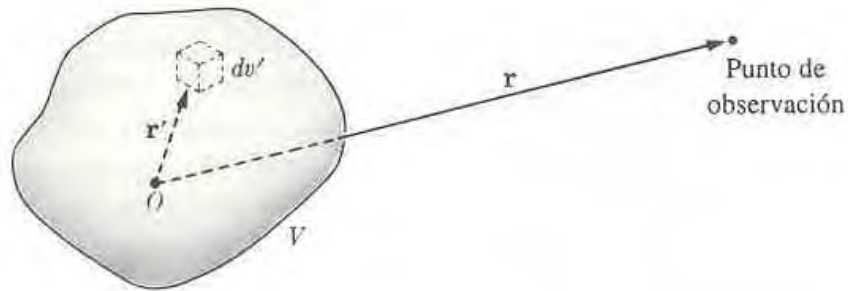


FIGURA 12. Carga localizada en un volumen V , con una densidad de carga ρ' .

El potencial en r está dado por

$$(1) \quad d\Phi(r) = \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dQ$$

ecuación que es válida siempre.

En adelante, se tomará el punto de observación como muy lejano a la carga y por tanto se asumirá $r' \ll r$.

La cantidad $|\vec{r} - \vec{r}'|$ puede representarse mediante el *Teorema del Coseno* como

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) \quad \int d\Phi = \Phi = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right)^{\frac{1}{2}} k\rho' dv'$$

ahora, para facilitar los cálculos se sustituirá $\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta = \delta$, simplificando la integral, por consiguiente,

$$\Phi = \frac{k}{r} \int (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} \rho' dv'$$

para encontrar una solución satisfactoria a esta expresión es necesario desarrollar la serie de potencias del binomio de Newton.

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{1}{2!}n(n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

por lo tanto, la expresión queda

$$\Phi = \frac{k}{r} \int \left[1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \delta + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \delta^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} - 2 \right) \delta^3 \right] \rho' dv'$$

ahora bien, sustituyendo nuevamente a δ y factorizando se obtiene

$$\Phi = \frac{k}{r} \int \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cos\theta + 4 \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cos^2\theta \right] \right. \\ \left. - \frac{5}{16} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^6 - 6 \left(\frac{r'}{r} \right)^5 \cos\theta + 12 \left(\frac{r'}{r} \right)^4 \cos^2\theta - 8 \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cos^3\theta \right] + \dots \right\} \rho' dv'$$

Teniendo en cuenta la condición $r' \ll r$ se puede concluir que las potencias mayores a tres tienden a cero, por lo tanto la expresión se reduce a

$$(3) \quad \Phi = \underbrace{\frac{k}{r} \int \rho' dv'}_{K_0} + \underbrace{\frac{k}{r} \int \left(\frac{r'}{r} \right) \cos\theta \rho' dv'}_{K_1} + \underbrace{\frac{k}{r} \int \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3\cos\theta - 1}{2} \right) \rho' dv'}_{K_2}$$

$$+ \underbrace{\frac{k}{r} \int \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{5 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta}{2}\right) \rho' dv'}_{K_3}$$

es decir,

$$(4) \quad \Phi = K_0 + K_1 + K_2 + K_3$$

Esta expresión representa una expansión del potencial en serie de potencias, donde cada sumando constituye la contribución al potencial. De la siguiente forma:

- K_0 es una contribución proveniente de un monopolo, es decir, una carga neta diferente de cero. En términos físicos, no es más que el potencial eléctrico debido a una esfera cargada o a una carga puntual.
- K_1 es una contribución proveniente de un dipolo, es decir, la contribución de una estructura de carga neta cero, donde las cargas no están mezcladas (la presencia de una región netamente positiva y otra región netamente negativa). Por lo tanto, la aparición de esta integral es consecuencia de que las cargas están distribuidas.
- Las restantes integrales son contribuciones correspondientes a un cuadrupolo y un octupolo, en su orden respectivo. Estas contribuciones son consecuencia de la no existencia de las integrales anteriores.

Ahora, si el monopolo existe, él es el término dominante y de lo contrario, el término que predominará en la serie será el dipolo y así sucesivamente.

En caso de existencia del monopolo prácticamente el potencial se puede acercar a:

$$(5) \quad \Phi(r) = \frac{k}{r} \int \rho' dv'$$

Además, es importante tener en cuenta la situación de la no existencia de carga neta, esto puede ser consecuencia de la neutralidad de la carga, observada en un dipolo, cuadrupolo o en las demás distribuciones.

En la realidad, se pueden encontrar distribuciones multipolares en los motores eléctricos, donde la corona del rotor puede generar diferencias de potencial características de una estructura multipolar.

2.2 SERIES DE FOURIER.

Esta serie debe su nombre a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), quien fue un físico y matemático francés, confidente del emperador Napoleón. Fourier usó dicha serie trigonométrica en sus investigaciones sobre la teoría del calor, las cuales aparecieron en su tratado clásico “*Théorie Analytique de la Chaleur*”. Sin embargo, Fourier no “inventó” la serie de Fourier. El estudio de la teoría del desarrollo de funciones en series trigonométricas se debió principalmente a Daniel Bernoulli y a Leonhard Euler.

Para hallar la solución de problemas con valores en la frontera es necesario saber como se desarrolla una función en una *serie trigonométrica*. Para este propósito es necesario definir la *serie de Fourier* como: la representación exacta de una función periódica que consiste en la suma de senoides.

Consideremos una función periódica de la forma

$$(6) \quad f(x) = f(x + nP) \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

para todo valor de x , siendo P el periodo.

La expresión de una suma infinita de senoides armónicamente relacionadas llamada serie de Fourier es

$$(7) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x$$

donde $\omega_0 = 2\pi/P$ y a_0 , a_n y b_n (todos reales) se llaman *coeficientes trigonométricos de Fourier*, los cuales pueden obtenerse de

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{P} \int_{x_0}^{P+x_0} f(x) dx$$

$$(8) \quad (b) \quad a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos(n\omega_0 x) dx$$

$$(c) \quad b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin(n\omega_0 x) dx$$

Los valores de cada coeficiente surge a partir de la ortogonalidad que goza esta función, es también muy importante para la resolución de problemas tener presente la notación *compleja de las series de Fourier*. Esta notación se puede obtener usando las siguientes *identidades de Euler*:

$$(9) \quad (a) \quad e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$(b) \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

por lo anterior la serie trigonométrica de Fourier de $f(x)$ se puede escribir en la siguiente forma

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}$$

en donde

$$(11) \quad c_n = \frac{1}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx$$

de (10) estamos suponiendo que $f(x)$ es continuo en x .

La idea de una serie de Fourier para una función de una variable única de x puede extenderse al caso de funciones de dos variables x e y , esto es $f(x,y)$. Por ejemplo, podemos desarrollar $f(x,y)$ en una serie doble de seno de Fourier así,

$$(12) \quad f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \sin(m\omega_0 x) \sin(n\omega_0 y)$$

en donde

$$(13) \quad H_{mn} = \frac{4}{P_x P_y} \int_0^{P_x} \int_0^{P_y} f(x, y) \sin(m\omega_0 x) \sin(n\omega_0 y) dx dy$$

el valor del coeficiente doble de Fourier se obtiene por medio de la ortogonalidad de la función.

Se pueden obtener resultados semejantes para series de coseno o para series que tengan tanto senos como cosenos.

Estas series de Fourier tienen numerosas aplicaciones a la solución de problemas de valor límite entre los cuales se pueden mencionar los problemas de flujo de calor, de sistemas vibratorios y solución a la ecuación de Laplace que es nuestro tema de interés.

2.3 TEORÍA DE ARMÓNICOS ESFÉRICOS

En problemas electrostáticos, cuando se emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación de Laplace bajo geométricas esféricas, se presenta este tipo característico de ecuación diferencial a resolver

$$(14) \quad (1-x^2)P'' - 2xP' + l(l+1)P = 0$$

Conocida como la *ecuación de Legendre*, en honor al matemático francés Adrien Marie Legendre (1752 –1853); quien también se encargó de encontrar las soluciones polinomiales de esta ecuación, durante sus estudios de gravitación. Además de sus aplicaciones en electrostática, la ecuación de Legendre surge en numerosos problemas físicos, particularmente en aquellos con valor en la frontera para esferas. El parámetro l en (14) es una constante, escribiendo la ecuación de Legendre de la forma

$$P'' - \frac{2xP'}{(1-x^2)} + \frac{1}{(1-x^2)}l(l+1)P = 0$$

se puede observar que los coeficientes de la ecuación son analíticos en todos los puntos excepto en 1 y -1 . A razón de que cero es un punto ordinario de la ecuación de Legendre, hay dos soluciones analíticas en $(-1,1)$, linealmente independientes y que se pueden encontrar mediante una *solución de Frobenius*

$$(15) \quad P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}$$

Sustituyendo (15) y sus derivadas en (14), se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+\alpha)(j+\alpha-1)x^{j+\alpha-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+\alpha)(j+\alpha-1)x^{j+\alpha} \\ & - 2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+\alpha)x^{j+\alpha} + l(l+1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

simplificando

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j + \alpha)(j + \alpha - 1)x^{j+\alpha-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j [(j + \alpha)(j + \alpha + 1) - l(l + 1)]x^{j+\alpha} = 0$$

En esta ecuación se puede detallar que el exponente de menor valor está ligado a la expresión de la izquierda, el cual se encuentra desfasado por dos unidades con respecto al exponente de la expresión derecha. Los dos primeros términos para $j = 0$ y $j = 1$ permiten la existencia de los exponentes $x^{\alpha-2}$ y $x^{\alpha-1}$, respectivamente, donde se puede hallar que

$$\text{si } a_0 \neq 0, \text{ entonces } \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\text{si } a_1 \neq 0, \text{ entonces } \alpha(\alpha + 1) = 0$$

Ahora, para un exponente $(j + \alpha)$ de x general, se obtiene

$$a_{j+2}(j + \alpha + 2)(j + \alpha + 1) - a_j [(j + \alpha)(j + \alpha + 1) - l(l + 1)] = 0$$

de manera que la relación de recurrencia es

$$(16) \quad a_{j+2} = -\frac{(j + \alpha)(j + \alpha + 1) - l(l + 1)}{(j + \alpha + 2)(j + \alpha + 1)} a_j$$

donde el parámetro l es un número entero. El argumento se puede sustentar a razón de que el producto $(j + \alpha + 1)(j + \alpha)$ está conformado por dos parámetros, los cuales son números enteros positivos, donde $\alpha = 0$ o $\alpha = \pm 1$, de aquí se concluye que $l(l + 1)$ es un producto de números enteros positivos.

Escogiendo $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$, es evidente que $a_3 = a_5 = a_7 \dots = 0$, por lo tanto, solo se pueden generar los términos de j pares.

Ahora, para $\alpha = 0$ la relación de recurrencia toma la forma

$$(17) \quad a_{j+2} = -\frac{(j + l + 1)(j - l)}{(j + 2)(j + 1)} a_j$$

construyendo la siguiente serie

$$P_1(x) = a_0x^0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots$$

Donde, escogiendo $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$, se encuentra que $a_2 = a_4 = a_6 \dots = 0$, generándose solo términos impares de j .

Para $\alpha = 0$ la relación de recurrencia es

$$(18) \quad a_{j+2} = -\frac{(j+l+1)(j-l)}{(j+2)(j+1)}a_j$$

generando la siguiente serie

$$(19) \quad P_2(x) = a_1x^1 + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots$$

Como l es un entero positivo, la serie de potencias de P_1 (si l es par) o P_2 (si l es impar) se reduce a una serie finita y se obtiene una solución polinomial de la ecuación de Legendre.

Los polinomios resultantes se llaman *Polinomios de Legendre* y se denotan por $P_l(x)$. Los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

El comportamiento de algunos de estos polinomios, en el intervalo comprendido entre $-1 \leq x \leq 1$, se muestra en la figura 2.

Manipulando la ecuación (15) y (16) es posible obtener la siguiente representación compacta de los polinomios de Legendre; conocida como la *formula de Rodríguez*

$$(20) \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

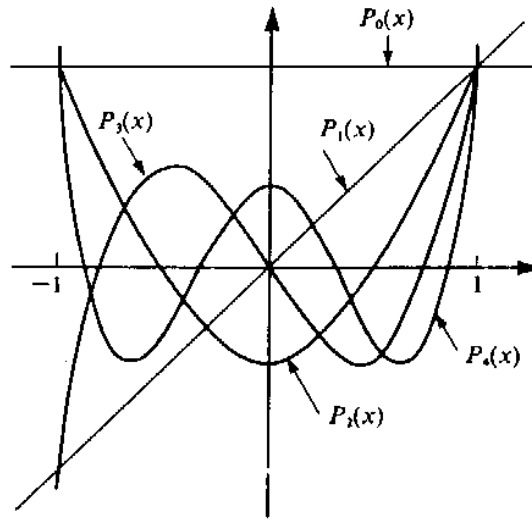


FIGURA 13. Polinomios de Legendre $P_0(x)$ hasta $P_4(x)$, $-1 \leq x \leq 1$

Los polinomios de Legendre forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, es decir

$$(21) \quad \int_{-1}^1 P_l(x)P_l(x)dx = 0$$

Para probar la ortogonalidad de este conjunto de funciones, se puede emplear directamente la ecuación diferencial (14) escrita de la siguiente forma

$$(22) \quad \int_{-1}^1 P_l(x) \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) + l(l+1)P_l \right] dx = 0$$

integrando el primer termino por partes, con $u = P_l(x)$ y $dv = \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) \right] dx$ se

obtiene

$$\int_{-1}^1 P_l(x) \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) dx = P_l(x) (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_l}{dx} dx$$

donde el primer termino de la expresión derecha es cero, simplificándose a

$$(23) \quad \int_{-1}^1 P_{l'}(x) \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} dx$$

sustituyendo (23) en (22), resulta

$$(24) \quad \int_{-1}^1 \left[(x^2-1) \frac{dP_{l'}}{dx} \frac{dP_l}{dx} + l(l+1) P_{l'}(x) P_l(x) \right] dx = 0$$

ahora, intercambiando l' por l

$$\int_{-1}^1 \left[(x^2-1) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} + l'(l'+1) P_{l'}(x) P_l(x) \right] dx = 0$$

y restando la expresión obtenida (24), da como resultado una condición ortogonal

$$(25) \quad [l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = 0$$

como $l \neq l'$, la integral es igual a cero, de lo contrario si $l = l'$, la integral se hace finita. Para determinar el valor de esta integral, es necesario usar la representación explícita de los polinomios de Legendre, es decir la formula de Rodríguez, entonces

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx$$

integrando por partes l veces, con $u = \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$ y $dv = \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1) dx$ se tiene

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \left[\frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (x^2-1)^l dx \right]$$

se puede observar que al evaluar el primer termino de la derecha entre 1 y -1 , este se anula, debido a las siguientes consideraciones:

- Si se deriva un polinomio las mismas veces que su grado, se obtiene una constante.
- Si se deriva un polinomio de un grado mayor que el orden de la derivada, se obtiene un polinomio de grado uno.

Reduciéndose la expresión a

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = -\frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}(x^2-1)^l dx$$

Integrando por partes de nuevo en busca de una expresión generalizada, se obtiene.

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}}(x^2-1)^l \frac{d^{l+2}}{dx^{l+2}}(x^2-1)^l dx$$

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = -\frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-3}}{dx^{l-3}}(x^2-1)^l \frac{d^{l+3}}{dx^{l+3}}(x^2-1)^l dx$$

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-4}}{dx^{l-4}}(x^2-1)^l \frac{d^{l+4}}{dx^{l+4}}(x^2-1)^l dx$$

De lo anterior, se observa claramente que en la medida en que se integra; un termino aumenta de orden mientras el otro disminuye. de ahí que se pueda concluir que si se integra l veces, se consigue llegar a

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = -\frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-l}}{dx^{l-l}}(x^2-1)^l \frac{d^{l+l}}{dx^{l+l}}(x^2-1)^l dx$$

simplificando algunos términos, se obtiene

$$(26) \quad \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(x^2-1)^l dx$$

Ahora bien, resolver la derivada que se encuentra dentro del integrando, implica retomar el desarrollo del binomio de Newton; según el cual se tiene

$$(a+b)^l = a^l + la^{l-1}b + \frac{l(l-1)}{2!}a^{l-2}b^2 + \dots + \frac{1}{k!} \frac{l!}{(l-k)!} a^{l-k}b^k + \dots + b^l$$

$$(a+b)^l = \binom{l}{0}a^l b^0 + \binom{l}{1}a^{l-1}b^1 + \binom{l}{2}a^{l-2}b^2 + \dots + \binom{l}{k}a^{l-k}b^k + \dots + \binom{l}{l}a^0 b^l$$

Generalizando esta expresión

$$(a + b)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} a^{l-k} b^k$$

donde

$$\binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$$

de aquí que

$$\frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l = \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} x^{2(l-k)} (-1)^k$$

Ahora si $k = 0$ el orden de la derivada es igual al grado del polinomio, por lo tanto su solución es una constante. De lo contrario, si $k > 0$ el grado del polinomio es menor que el orden de la derivada, es decir $\frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l = 0$, por ende, solo se analizará el caso para $k = 0$

$$\frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l = \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} \sum_{k=0}^l \binom{l}{0} x^{2l}$$

Al desarrollar la derivada, se encuentra

$$(27) \quad \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l = (2l)!$$

sustituyendo (27) en (26), se obtiene

$$(28) \quad \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx$$

ahora, mediante tablas el valor de la integral se expresa como

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^l = \frac{2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!}$$

consecuentemente la condición de ortogonalidad para $l = l'$ es

$$(29) \quad \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

Asumiendo una expresión de la forma

$$(30) \quad \Phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l P_l(x)$$

se encuentra que

$$\int_{-1}^1 [\Phi(x) P_l(x)] dx = \frac{2}{2l+1}$$

Finalmente, evaluando la integral entre los límites -1 y 1, se puede determinar el valor del coeficiente A_l

$$(31) \quad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x) P_l(x) dx$$

2.4 TEORÍA DE ARMÓNICOS CILÍNDRICOS

En problemas electrostáticos, cuando se trabaja el método de separación de variables; con la finalidad de resolver la ecuación de Laplace para geometrías cilíndricas, se presenta un tipo característico de ecuación diferencial a resolver, que muestra la siguiente forma

$$(32) \quad x^2 R'' + xR' + (x^2 - v^2)R = 0$$

llamada *ecuación de Bessel*, en honor al astrónomo alemán Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846). Esta ecuación diferencial de segundo orden es de gran importancia en las matemáticas aplicadas; cabe aclarar igualmente, que es usual referirse a v como el orden de la ecuación con $v \geq 0$. Así, por ejemplo, en la siguiente expresión, si se habla de la ecuación de Bessel de orden 6, se hace referencia a la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2 R'' + xR' + (x^2 - 36)R = 0$$

La ecuación de Bessel surgió en el estudio de la radiación de energía y en otros contextos, particularmente en aquellos donde el modelo matemático se expresa naturalmente en coordenadas cilíndricas.

Partiendo de la definición de punto singular de una curva; como el punto en que se anula la derivada de una función, es de rutina verificar que cero es un punto singular regular de la ecuación de Bessel, por tal razón se intentará una *solución de Frobenius*

$$(33) \quad R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}$$

ahora, sustituyendo (33) y sus derivadas en (32), se tiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j + \alpha)(j + \alpha - 1)x^{j+\alpha} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j + \alpha)x^{j+\alpha} + (x^2 - v^2) \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} = 0$$

simplificando

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{a_j [(j+\alpha)(j+\alpha-1) + (j+\alpha) - v^2] x^{j+\alpha} + a_j x^{j+\alpha+2}\} = 0$$

Igualando la suma de los coeficientes de $x^{s+\alpha}$ a cero se encuentra

$$(34) \quad \begin{aligned} (a) \quad & a_0 [\alpha(\alpha-1) + \alpha - v^2] = 0 && (s=0) \\ (b) \quad & a_1 [(\alpha+1)\alpha + (\alpha+1) - v^2] = 0 && (s=1) \\ (c) \quad & a_s [(s+\alpha)(s+\alpha-1) + (s+\alpha) - v^2] + a_{s-2} = 0 && (s=2,3,\dots) \end{aligned}$$

suponiendo en la ecuación (34.a) que $a_0 \neq 0$, se obtiene la ecuación de índices

$$(35) \quad (\alpha^2 - v^2) = 0$$

Donde se puede observar que esta ecuación tiene como raíces a $\alpha = \pm v$. Por lo cual, en primer lugar se determinara una solución correspondiente a la raíz $\alpha_1 = v$, entonces. De (34.b) se obtiene

$$(36) \quad (2v+1)a_1 = 0$$

como v es un número entero positivo, implica que $(2v+1) \neq 0$, y por consiguiente $a_1 = 0$. Ahora partiendo de la ecuación (34.c), se deduce la *relación de recurrencia*

$$(37) \quad (s+2v)sa_s + a_{s-2} = 0$$

Siendo $a_1 = 0$, trae como consecuencia que $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$, de modo que para $s = 0, 2, 4, \dots$; y generalizando para un números par se puede escribir como $2s$, encontrando para $s = 0, 1, 2, \dots$; la siguiente expresión

$$(38) \quad a_{2s} = -\frac{1}{2s(2s+2v)} a_{2s-2}$$

siempre, esta relación debe expresarse en función de a_0 , para lo cual se parte de una forma general que permita referirse a (38) así:

$$a_{2s} = -\frac{1}{2s(2s+2v)} \frac{-1}{2(s-1)[2(s-1+2v)]} a_{2(s-1)-2}$$

$$a_{2s} = \frac{1}{2^4 s(s-1)(s+v)(s+v-1)} a_{2s-4}$$

$$a_{2s} = \dots = \frac{(-1)^s}{(2^{2s})(1)(2)\dots s(1+v)(2+v)\dots (s-1+v)(s+v)} a_0$$

Ahora, introduciendo estos coeficientes en la ecuación (33), y recordando que todos los a impares son iguales cero, se consigue una solución de la ecuación de Bessel de orden v

$$(39) \quad R_1(x) = a_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2^{2s} s!(1+v)(2+v)\dots (s-1+v)(s+v)} x^{2s+v}$$

Sin embargo antes de proseguir en la búsqueda de una segunda solución, se profundizará en una función que es de gran utilidad en el momento de escribir las soluciones de la ecuación de Bessel. Razón por la cual (39) y otras soluciones, se escriben en términos de la *función Gamma*, que esta definida para los $x > 0$, por la integral

$$(40) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Donde Γ representa la letra griega Gamma, siendo la integral que define a $\Gamma(x)$ impropia en cero e infinito, y convergente para todo $x > 0$. Es importante también mencionar para $\Gamma(x)$; la propiedad factorial, de gran utilidad para desarrollos posteriores; la cual expresa

$$\text{Si } x > 0, \text{ entonces } \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Esta propiedad se puede demostrar partiendo de (40) e integrando por partes, con $u = t^x$ y $dv = e^{-t} dt$, teniendo que $du = xt^{x-1}$ y $v = -e^{-t}$, hallando

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_a^b - \int_a^b -e^{-t} x t^{x-1} dt$$

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt$$

Ahora, tomando el limite en la anterior ecuación cuando $a \rightarrow 0$ y $b \rightarrow \infty$, se consigue demostrar

$$(41) \quad \underbrace{\int_0^\infty t^x e^{-t} dt}_{\Gamma(x+1)} = x \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt}_{x\Gamma(x)}$$

cambiando la variable x por s y usando la propiedad factorial, se logra obtener, para cualquier n entero,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1) = \dots = s(s-1)(s-2)\dots(1)\Gamma(1) = s!\Gamma(1)$$

pero como

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

de aquí, que

$$(42) \quad \Gamma(s+1) = s!$$

Ahora, siendo v un número no entero (con $v \geq 0$), es posible aplicar una propiedad similar a la anterior, obteniendo

$$\Gamma(s+v+1) = (s+v)\Gamma(s+v) = (s+v)(s+v-1)\Gamma(s+v-1) = \dots = (s+v)!$$

de la cual

$$(43) \quad \Gamma(s+v+1) = (s+v)(s+v-1)\dots(1+v)\Gamma(1+v)$$

Por lo tanto, de (43) se halla

$$(44) \quad (s + v)(s + v - 1) \cdots (1 + v) = \frac{\Gamma(s + v + 1)}{\Gamma(1 + v)}$$

sustituyendo (44) en (39), se consigue

$$R(x) = a_0 x^v \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(1 + v)}{s! \Gamma(s + v + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Donde es costumbre, dar a a_0 un valor específico

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(1 + v)}$$

de aquí, se consigue una solución particular de la ecuación de Bessel; denotada por $J_v(x)$:

$$(45) \quad J_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s + v + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Frecuentemente, los valores enteros de v se denotan por n , para $n \geq 0$. Además teniendo en cuenta que $\Gamma(s + n + 1) = (s + n)!$, (45) se puede expresar de nuevo de la siguiente forma

$$(46) \quad J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (s + n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Por otra parte, para el segundo raíz ($\alpha_2 = -v$); se obtiene de igual manera, la expresión

$$(47) \quad J_{-v}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s - v + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Es conveniente aclarar que las soluciones $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$, se denominan *funciones de Bessel de primera clase*, de orden v y $-v$, respectivamente.

Una característica particular para el caso en que $\nu = 0$; es que ambas soluciones son iguales de manera que

$$(48) \quad J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Si $\nu > 0$ y no entero, se deduce que las funciones de Bessel de primera clase $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$, son *soluciones linealmente independientes* de (32) para el intervalo $0 < x < \infty$, por lo tanto la solución general es

$$(49) \quad R(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

Caso contrario, si ν es un entero; (49) no es una solución general y las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son *linealmente dependientes*

$$(50) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

2.4.1 FUNCIONES DE BESSEL DE SEGUNDA CLASE

En esta sección se obtendrá una segunda solución para el caso en que $n = 0$, es decir (

$$x^2 R'' + xR' + x^2 R = 0$$

o, dividiendo entre x

$$(51) \quad xR'' + R' + xR = 0$$

Para este caso, la ecuación de índices tiene la raíz doble $\alpha = 0$; encontrando por el *método de Frobenius* que la solución puede tener la forma

$$(52) \quad R_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s x^s$$

Sustituyendo R_2 y sus derivadas en (51) se consigue

$$xJ_0''(x)\ln(x) + 2J_0'(x) - \frac{1}{x}J_0(x) + \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)A_s x^{s-1} + J_0'(x)\ln(x) + \frac{1}{x}J_0(x) + \sum_{s=1}^{\infty} sA_s x^{s-1} \\ + xJ_0(x)\ln(x) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s x^{s+1} = 0$$

En esta expresión los términos logarítmicos desaparecen debido a que $J_0(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden cero, mientras que los otros dos términos que contienen $J_0(x)$ se cancelan, encontrándose

$$(53) \quad 2J_0'(x) + \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)A_s x^{s-1} + \sum_{s=1}^{\infty} sA_s x^{s-1} + \sum_{s=1}^{\infty} A_s x^{s+1} = 0$$

A razón de que $s(s-1) = s^2 - s$, parte de la primera sumatoria cancela los términos de la segunda, excepto el término para $s=1$, y obtenemos

$$(54) \quad 2J_0'(x) + \sum_{s=2}^{\infty} s^2 A_s x^{s-1} + A_1 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s x^{s+1} = 0$$

De (48) en la sección (2.4), se consigue la serie de potencia de J_0' en la

$$J_0' = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2s x^{2s-1}}{2^{2s} (s!)^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1}$$

sustituyendo esta serie en (54), se tiene

$$2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} + \sum_{s=2}^{\infty} s^2 A_s x^{s-1} + A_1 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s x^{s+1} = 0$$

escribiendo de otra manera

$$2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} + A_1 + 4A_2 x + \sum_{s=3}^{\infty} s^2 A_s x^{s-1} + \sum_{s=1}^{\infty} A_s x^{s+1} = 0$$

En esta ecuación se detallan dos sumatorias que producen el mismo exponencial de x , por lo tanto es posible escribir de nuevo la ecuación de la forma

$$(55) \quad 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} + A_1 + 4A_2 x + \sum_{s=3}^{\infty} (s^2 A_s + A_{s-2}) x^{s-1} = 0$$

Del lado izquierdo de la ecuación, el único término constante es A_1 ; el cual debe ser igual al término constante del otro lado de la ecuación, es decir $A_1 = 0$. De la ecuación (55), se encuentra que en la sumatoria donde las potencias pares de x se forman a partir de s con número impar, los coeficientes asociados de subíndices impares deben ser cero, a razón de su dependencia con A_1 .

$$s^2 A_s + A_{s-2} = 0 \quad s = 3, 5, 7, \dots$$

Ahora se determinaran los coeficientes que tienen subíndice par, reemplazando en la ecuación (55), s por $2j$ en la segunda sumatoria y de igual forma reemplazando s por j en la otra sumatoria

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-1} + 4A_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} (4j^2 A_{2j} + A_{2j-2}) x^{2j-1} = 0$$

Manipulando matemáticamente la anterior expresión, se escribe

$$(4A_2 - 1)x + \sum_{j=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{2^{2j-2} j!(j-1)!} + 4j^2 A_{2j} + A_{2j-2} \right] x^{2j-1} = 0$$

Ahora, igualando los coeficientes de cada una de las potencias de x a cero, se consigue en primer lugar

$$4A_2 - 1 = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{4}$$

y en segundo instancia, se llega a la relación de recurrencia

$$A_{2j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2j} (j!)^2 j} - \frac{1}{4j^2} A_{2j-2} \quad \text{para } j = 2, 3, 4, \dots$$

si se reemplaza algunos de los valores que toma j en la relación de recurrencia, se tiene

$$A_4 = -\frac{3}{128} = \frac{-1}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{con } j = 2$$

$$A_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \quad \text{con } j = 3$$

lo que en general, permite obtener

$$A_{2j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2^2 4^2 6^2 \dots (2j)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{j} \right]$$

donde la expresión entre corchetes usualmente se denota por $\varphi(j)$; lo cual permite escribir

$$A_{2j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2j} (j!)^2} \varphi(j) \quad \text{para } j= 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente si se reemplaza el valor obtenido para el coeficiente ($A_s = A_{2j}$) en la ecuación (52), se encuentra

$$R_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s} (s!)^2} \varphi(s) x^{2s}$$

Conocida como *ecuación de Bessel de orden cero*, donde a causa del término logarítmico; esta solución es *linealmente independiente* de $J_0(x)$. Por ende usualmente se emplea una segunda solución, constituida por la combinación lineal particular de $J_0(x)$ y $R_2(x)$, denotado por $N_0(x)$ y se define como

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \{R_2(x) + [\gamma - \ln 2] j_0(x)\}$$

donde γ es la *constante de Euler*,

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} [\varphi(s) - \ln(s)] \approx 0.577215664901533 \dots$$

Como, $N_0(x)$ es *linealmente independiente* de $J_0(x)$, la solución general de la ecuación de Bessel de orden cero es

$$R(x) = a_1 J_0(x) + a_2 N_0(x)$$

Ahora expresando a $N_0(x)$ en términos de las series obtenidas previamente para $R_2(x)$, se tiene

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_0(x) \ln(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \varphi(s) + [\gamma - \ln 2] j_0(x) \right\}$$

Simplificando, se tiene

$$(56) \quad N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_0(x) \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \varphi(s) \right\}$$

también conocida como *función Bessel de segunda clase de orden cero o función de Neumann de orden cero*.

Ahora, para el caso en que $\nu = n = 1, 2, 3, \dots$, puede obtenerse una segunda solución mediante manipulaciones semejantes, pero partiendo esta vez de la ecuación que representa la forma de las soluciones cuando las raíces de la ecuación de índices difiere en un entero, observándose en este caso que la solución $N_n(x)$ también contiene un término logarítmico

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_n(x) \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} [\varphi(s) + \varphi(n+s)]}{(s!)^2 (s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{2s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} \right\}$$

La situación todavía no es completamente satisfactoria, debido a que esta segunda solución esta definida de manera diferente, dependiendo de sí el orden de ν es entero o no. Por tal motivo para proporcionar uniformidad de formalismo y tabulación numérica, resulta deseable adoptar una forma de la segunda solución que sea valida para todos los valores del orden. Razón por la cual se introduce una segunda solución estándar $N_n(x)$ definida para todo ν por la formula

$$(57) \quad N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)]$$

conocida como *función de Bessel de segunda clase de orden ν o función de Neumann de orden ν* . Esta es una combinación lineal de J_ν y $J_{-\nu}$; dos soluciones de Bessel de orden ν , por lo tanto también es solución de Bessel de orden ν . Puede demostrarse que es posible obtener una solución N_n , para un entero no negativo n . A partir de esta definición tomando el limite

$$(58) \quad N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x)$$

N_ν es linealmente independiente de J_ν y tiene las propiedades unificadora que nos permite escribir la solución general de la ecuación de Bessel de orden ν ; para todos los valores de ν , sin importar que sea entero o no,

$$(59) \quad R(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 N_\nu(x)$$

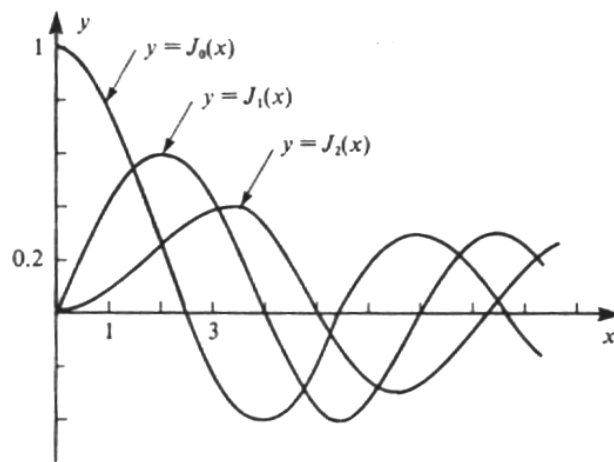


Figura 14: Funciones de Bessel del primer tipo

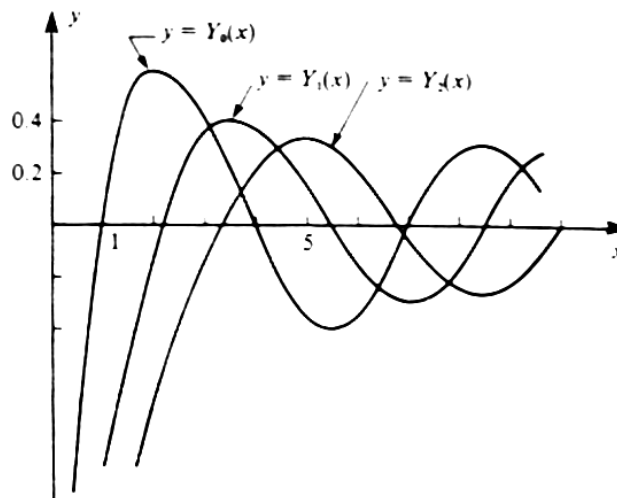


Figura 15: Función de Bessel de segunda clase

Teniendo las soluciones de Bessel de primera y segunda clase, es importante observar el comportamiento grafico de las mismas; el cual se muestra en las figuras 14 y 15 respectivamente. También con relación a estas funciones, se encuentra extensas tablas que han sido compiladas; tal como se presenta en la tabla 1, debido a su uso en una variedad de aplicaciones.

Finalmente es conveniente considerar que existe una necesidad práctica para soluciones de la ecuación de Bessel que sean complejas para valores reales de x . Por esta razón, las soluciones

$$(60) \quad \begin{aligned} H_v^{(1)}(x) &= J_v(x) + iN_v(x) \\ H_v^{(2)}(x) &= J_v(x) - iN_v(x) \end{aligned}$$

se usan frecuentemente y también se han construido tablas de ellas. Estas funciones linealmente independientes se llaman funciones de Bessel de tercera clase de orden v o primera y segunda función de Hankel de orden v .

X	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.00	1.000000	0.000000
0.20	0.990025	0.099501
0.40	0.960398	0.196027
0.60	0.912005	0.286701
0.80	0.846287	0.368842
1.00	0.765197	0.440051
1.50	0.511828	0.557937
2.00	0.223891	0.576725
2.50	-0.048384	0.497094
3.00	-0.260052	0.339059
3.50	-0.380127	0.137378
4.00	-0.397149	-0.66043

X	$J_0(x)$	$J_1(x)$
4.50	-0.320543	-0.231060
5.00	-0.177597	-0.327579
5.50	-0.006844	-0.341438
6.00	0.150645	-0.276684
6.50	0.260095	-0.153841
7.00	0.300079	-0.004683
7.50	0.266339	0.135248
8.00	0.171651	0.234636
8.50	0.041939	0.273121
9.00	-0.090334	0.245312
9.50	-0.193929	0.161264
10.0	-0.245936	0.043473
10.5	-0.236648	-0.078850
11.0	-0.171190	-0.176785
11.5	-0.067654	-0.228379
12.0	0.047689	-0.223447

TABLA 1. Valores de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ para valores seleccionados de x

2.4.2 EXPANSIÓN EN SERIE DE LAS FUNCIONES CILÍNDRICAS

En la física matemática, muchas veces es necesario expandir una función en términos de funciones cilíndricas, donde la forma de la expansión depende específicamente de la naturaleza del problema. Ahora consideraremos la más importante de estas expansiones. Cuyo rol en varios problemas que involucran funciones cilíndricas es semejante a la serie de Fourier e integrales de Fourier en

problemas que involucran funciones trigonometrías. La expansión en serie es de la forma

$$(61) \quad \Phi(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_v \left(x_{vm} \frac{\rho}{a} \right); \quad 0 < \rho < a$$

donde $\Phi(\rho)$ es una función real definida en el intervalo $(0, a)$, $J_v(x)$ es la *función de Bessel de primera clase y de orden v*

$$0 < x_{v1} < \dots < x_{vm} < \dots$$

donde x_{vm} son las raíces positivas de la ecuación $J_v(x) = 0$. El coeficiente de la expansión C_m puede determinarse usando las propiedades ortogonales del sistema de funciones

$$(62) \quad J_v \left(x_{vm} \frac{\rho}{a} \right); \quad m = 1, 2, \dots$$

Lo cual proviene de lo siguiente: consideremos la ecuación de Bessel escritas de la siguiente manera

$$R_\alpha'' + \frac{1}{\rho} R_\alpha' + \left(\alpha^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R_\alpha = 0, \quad R_\beta'' + \frac{1}{\rho} R_\beta' + \left(\beta^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R_\beta = 0$$

donde α y β son números enteros y estas ecuaciones satisfacen las funciones $R_\alpha = J_v(\alpha\rho)$ y $R_\beta = J_v(\beta\rho)$. Multiplicando la ecuación de la izquierda por R_β , y la ecuación de la derecha por R_α , y restando estos resultados, encontramos

$$\rho \frac{d}{d\rho} (R_\beta' R_\alpha - R_\alpha' R_\beta) + (R_\beta' R_\alpha - R_\alpha' R_\beta) = \rho R_\beta R_\alpha (\alpha^2 - \beta^2)$$

simplificando un poco, tenemos

$$(63) \quad \frac{d}{d\rho} [\rho (R_\beta' R_\alpha - R_\alpha' R_\beta)] = \rho R_\beta R_\alpha (\alpha^2 - \beta^2)$$

integrando este resultado entre 0 y a , encontramos que

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^a \rho R_\beta R_\alpha d\rho = \rho (R_\beta' R_\alpha - R_\alpha' R_\beta) \Big|_0^a$$

lo cual implica

$$(64) \quad \int_0^a \rho J_\nu(\beta\rho) J_\nu(\alpha\rho) d\rho = \frac{a\beta J'_\nu(\beta a) J_\nu(\alpha a) - a\alpha J'_\nu(\alpha a) J_\nu(\beta a)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

de esta ecuación surge que $\beta = \frac{x_{vm}}{a}$ y $\alpha = \frac{x_{vn}}{a}$, y obtenemos la siguiente formula

$$(65) \quad \int_0^a \rho J_\nu\left(x_{vm} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(x_{vn} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

Ahora aplicando él limite cuando $\beta \rightarrow \alpha$ haciendo uso de la regla de Hôpital, encontramos

$$(66) \quad \int_0^a \rho J_\nu^2\left(x_{vm} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{2} \left[J_\nu'^2(\alpha a) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 a^2}\right) J_\nu^2(\alpha a) \right]$$

o

$$(67) \quad \int_0^a \rho J_\nu^2\left(x_{vm} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(x_{vm}) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{vm})$$

entonces, asumiendo una expansión de la forma (1) es posible, multiplicarla por

$\rho J_\nu\left(x_{vm} \frac{\rho}{a}\right)$ e integrando entre 0 y a, podremos determinar el valor del coeficiente

C_m :

$$(68) \quad C_m = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{vm})} \int_0^a \rho \Phi(\rho) J_\nu\left(x_{vm} \frac{\rho}{a}\right) d\rho; \quad m = 1, 2, \dots$$

La serie (61), con el calculo del coeficiente (68), esto recibe el nombre de *serie de Bessel-Fourier de la función $\Phi(\rho)$* .

3. SOLUCIONES ANALÍTICAS DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Hablar de la ecuación de Laplace es considerar una región limitada por fronteras, donde existen potenciales eléctricos en ausencia de cargas. Obviamente las cargas tienen que estar en las fronteras de las zonas para que pueda existir potencial (no puede haber potencial eléctrico en ausencia de cargas externas a la región en estudio).

El cálculo de una función de potencial que resulta de resolver una función diferencial está sujeto a ciertas condiciones en la frontera, las cuales no son otra cosa que las propiedades que cumple dicha función.

En las aplicaciones se busca encontrar soluciones que satisfagan condiciones de frontera. Estas condiciones se refieren a los valores o derivadas de la función incógnita en la frontera de la región (o intervalo) de las variables de espacio independiente.

Por lo general, para especificar el potencial electrostático en una región se fija convencionalmente el potencial (condiciones de Dirichlet) en todo el contorno de la región de que se trate; así mismo, se puede fijar el campo eléctrico normal (condición de Neumann) sobre el contorno.

La solución de un problema de valor en la frontera normalmente se facilita si se plantea un sistema coordenado acorde con el contorno geométrico del mismo, ya sea de carácter rectangular, cilíndrico o esférico.

En este documento el método de separación de variables empleado para resolver ecuaciones diferenciales parciales que sean lineales y homogéneas, se aplicara pensando en una solución en forma de producto de funciones de una sola variable independiente. Este supuesto nos permite llevar la ecuación diferencial en cuestión a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este es el procedimiento clásico en la solución de la ecuación de Laplace, ya sea en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

3.1 SOLUCIÓN EN COORDENADAS RECTANGULARES

La ecuación de Laplace ($\nabla^2\Phi=0$) en coordenadas rectangulares se expresa como,

$$(1) \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

mediante el *método de separación de variables* se puede asumir una solución de la forma,

$$(2) \quad \Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Ahora, sustituyendo (2) en (1) y dividiendo el resultado por la ecuación (2) se encuentra,

$$(3) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Se puede observar en esta ecuación dos características particulares, la suma de los tres términos del lado izquierdo es una constante (=0) y cada variable es independiente, es decir, cada término debe ser igual a una constante. Por ende,

$$(a) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2$$

$$(4) \quad (b) \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2$$

$$(c) \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2$$

Donde α , β y γ son las constantes de separación elegidas de tal modo que se cumplan las condiciones de la frontera. Además,

$$(5) \quad \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$$

Ahora, el problema queda reducido a solucionar tres *ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas con coeficientes constantes*. Mediante métodos

algebraicos sencillos se puede resolver cada ecuación. Las soluciones encontradas son funciones elementales de la forma,

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & X(x) = \left\{ e^{\pm j\alpha x} \right\} = ce^{j\alpha x} + de^{-j\alpha x} \\
 (6) \quad (b) \quad & Y(y) = \left\{ e^{\pm j\beta y} \right\} = fe^{j\beta y} + ge^{-j\beta y} \\
 (c) \quad & Z(z) = \left\{ e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \right\} = ae^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + be^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}
 \end{aligned}$$

donde a, b, c, d, f y g son constantes que deben ser evaluadas en términos de las condiciones de frontera, y las constantes de separación α y β se determinan mediante la imposición de las condiciones de frontera específicas sobre el potencial.

Reemplazando (6) en (2), se llega a

$$(7) \quad \Phi(x, y, z) = \left\{ e^{\pm j\alpha x} \right\} \left\{ e^{\pm j\beta y} \right\} \left\{ ae^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + be^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \right\}$$

cuando el potencial es periódico en intervalos, se puede representar aproximadamente con una serie de sumas finitas de senoides armónicamente relacionadas llamada *serie de Fourier*.

Donde $\alpha = \frac{n\pi}{L_x}$ y $\beta = \frac{m\pi}{L_y}$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \Phi(x, y, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(c_n e^{j\frac{n\pi}{L_x} x} + d_n e^{-j\frac{n\pi}{L_x} x} \right) \left(f_m e^{j\frac{m\pi}{L_y} y} + g_m e^{-j\frac{m\pi}{L_y} y} \right) \right. \\
 & \left. \left(a_{nm} e^{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} z} + b_{nm} e^{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Una serie de Fourier es una representación exacta de una señal periódica que consiste en la suma de senoides en las frecuencias fundamental y de las armónicas.

Las constantes resultantes al usar las *condiciones de frontera*, deberán ser evaluadas por medio de la ecuación (13) de la sección 2.2

3.2 SOLUCIÓN EN COORDENADAS ESFÉRICAS

La gran diversidad de situaciones es razón por la cual, eventualmente surge la necesidad de expresar la ecuación de Laplace en términos de las variables esféricas (r, θ, φ) es decir,

$$(9) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Empleando el método de separación de variables, se obtiene

$$(10) \quad \Phi(r, \theta, \varphi) = U(r)P(\theta)Q(\varphi)$$

Es decir el producto de tres funciones independientes, una función radial (U) y dos funciones (P) y (Q) dependientes de los ángulos polar y azimutal respectivamente.

Al sustituir (10) en (9) y al multiplicar la expresión resultante por $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{U(r)P(\theta)Q(\varphi)}$

se obtiene

$$(11) \quad r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{r^2 U(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q(\varphi)} \frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

Ahora, con base en el argumento acostumbrado referente al desarrollo de ecuaciones de este tipo, se llega a

$$(12) \quad \frac{1}{Q(\varphi)} \frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2$$

Esta ecuación del ángulo azimutal se resuelve de forma casi que inmediata, a razón de ser no mas que, una ecuación armónica con coeficientes constantes, cuya solución es el resultado de combinaciones lineales de la forma

$$(13) \quad Q(\varphi) = \left\{ e^{\pm jm\varphi} \right\} = C e^{jm\varphi} + D e^{-jm\varphi}$$

Donde m debe ser estrictamente un número entero, pero cabría preguntarse por que, para este caso en particular se debe cumplir tal condición, siendo que al detallar esta ecuación diferencial; presenta análogamente la misma estructura que la ecuación para el movimiento armónico simple y no habrían motivos inmediatos para pensar que m debe ser entero. La razón es evidente, en términos de las variables reales φ es un número. Sin embargo, físicamente φ debe ser interpretado como una posición mas no como un desplazamiento angular. Motivo por el cual, hay que tener en cuenta la manifestación periódica del potencial y para ello, el factor multiplicador m tiene que ser entero.

Ahora reemplazando la expresión (12) en (11), resultan las ecuaciones independientes en términos de los ángulos radial y polar,

$$(14) \quad (a) \quad \frac{1}{U(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU(r)}{dr} \right) = l(l+1)$$

$$(b) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P(\theta) = 0$$

Donde $l(l+1)$ es otra constante y en general l es un numero entero. La ecuación (14.a) puede escribirse

$$(15) \quad r^2 \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + 2r \frac{dU(r)}{dr} - l(l+1)U(r) = 0$$

Esta es la *ecuación de Cauchy-Euler* y tiene soluciones de la forma $U(r) = r^\alpha$.

Haciendo la sustitución respectiva, se encuentra

$$(16) \quad [\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1)]r^\alpha = 0$$

De aquí se puede detallar que los ceros de la expresión entre corchetes son $\alpha = l$ y $\alpha = -l - 1$. de manera que se obtiene una solución del tipo

$$(17) \quad U(r) = Ar^l + Br^{-l-1}$$

Por otra parte, la ecuación (14.b) se conoce con el nombre de *ecuación asociada de Legendre* y comúnmente para facilitar el proceso de encontrar sus soluciones se

efectúa la sustitución de $\cos\theta$ por x , llegando luego de varias operaciones sencillas a una expresión de la forma

$$(18) \quad (1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP(x)}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0$$

En un gran número de problemas, el potencial es independiente del ángulo azimutal (φ). En estos casos, $m=0$, y se obtiene la *ecuación de Legendre*

$$(19) \quad (1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP(x)}{dx} + l(l+1)P(x) = 0$$

La solución de esta ecuación se realiza mediante expansiones en series, tal como se encuentra desarrollado en el capítulo de "*métodos matemáticos en la teoría electrostática*" (sección 3.3), de donde resultan los *polinomios de Legendre o armónicos zonales de orden n* ; designados por $P_l(x)$.

Finalmente a razón de ser este documento un estudio relacionado con la aplicabilidad a determinadas situaciones físicas, es conveniente resaltar las propiedades de ortogonalidad que cumplen los polinomios de Legendre

$$(20) \quad \int_{-1}^1 P_l(x)P_q(x)dx = \int_0^\pi P_l(\cos\theta)P_q(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & q \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & q = n \end{cases}$$

Y la solución de (10) puede escribirse así

$$(21) \quad \Phi(r, \varphi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (Ar^{l+1} + Br^{-l}) \left(C e^{j\frac{m\pi}{a}\varphi} + D e^{-j\frac{m\pi}{a}\varphi} \right) P_l(x) \right\}$$

3.3 SOLUCIÓN EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Para el tipo de problemas con valores en la frontera, cuyas superficies geométricas involucran coordenadas cilíndricas, la ecuación de Laplace, queda

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

La solución de esta ecuación se realizará de igual forma como se ha venido desarrollando en los otros sistemas coordenados, es decir por el método de separación de variables. Por lo tanto se genera

$$(23) \quad \Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

Ahora, sustituyendo (23) en (22) y multiplicando por (23), se llega a

$$(a) \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

$$(3) \quad (b) \quad \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + v^2 Q = 0$$

$$(c) \quad \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

Donde las constantes de separación k^2 y v^2 son *números reales arbitrarios*. Las soluciones a las ecuaciones (24.a) y (24.b) son en orden respectivo de la forma

$$(25) \quad (a) \quad Z(z) = e^{\pm kz} = A e^{kz} + B e^{-kz}$$

$$(b) \quad Q(\varphi) = e^{\pm jv\varphi} = C e^{jv\varphi} + D e^{-jv\varphi}$$

la ecuación radial es decir, la ecuación (24.c) es otro caso de ecuaciones con coeficientes variables y puede ser expresada en forma estándar mediante el cambio de la variable $x = k\rho$, esto conduce a

$$(26) \quad x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - v^2) R = 0$$

Esta ecuación diferencial es la *ecuación de Bessel*, y sus soluciones reciben el nombre de *funciones Bessel de orden ν* . Del mismo modo, que en la precedente sección, la solución a esta ecuación se encuentra expuesta en detalle en el capítulo 2 (sección 2.4).

Donde la solución de (26) es:

$$(27) \quad J_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

$$(28) \quad J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

Dichas soluciones, $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se llaman *funciones de Bessel de primera clase, de orden ν y $-\nu$* , respectivamente. Esta serie converge para todos los valores finitos de x .

Si $\nu > 0$ y no es entero, entonces se encuentra que $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones linealmente independientes de (26) para $0 < x < \infty$ y por lo tanto la solución general en el intervalo sería

$$(29) \quad R(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

Sin embargo, si ν es un entero, entonces (29) no es una solución general. Para el entero $\nu = n$, las funciones de Bessel $J_{\nu}(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente dependientes, y esto puede ser visto como la representación de una serie, tal como

$$(30) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Consecuentemente esto es necesario para hallar otra solución linealmente independiente cuando n es un entero, esto es acostumbrado, incluso si ν no es un entero, para reemplazar la pareja $J_{\pm\nu}(x)$ por $J_{\nu}(x)$ y $N_{\nu}(x)$, llamada la *función de Neumann de orden ν o función de Bessel de segunda clase de orden ν*

$$(31) \quad N_{\nu}(x) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [J_{\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)]$$

Para ν no entero, N_ν y J_ν son linealmente independientes para $x > 0$, y la solución general de la *ecuación de Bessel de orden ν* es

$$(32) \quad R(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 N_\nu(x)$$

que vale sin importar que ν sea o no entero.

Las funciones de Bessel de tercera clase son llamadas también *funciones de Hankel* y son definidas como combinaciones lineales de $N_\nu(x)$ y $J_\nu(x)$:

$$(33) \quad \begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned}$$

Las funciones de Hankel forman un conjunto de soluciones fundamentales de la ecuación de Bessel.

Ahora bien la solución a la ecuación (23) es

$$(34) \quad \Phi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(A e^{kz} + B e^{-kz} \right) \left(C e^{j\nu\varphi} + D e^{-j\nu\varphi} \right) \left(E J_\nu(x) + F N_\nu(x) \right) \right\}$$

4. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON

La *ecuación de Poisson* es aplicada a situaciones donde se desconoce tanto la función de potencial como la distribución de carga y se desea determinar ambas variables. Este es el tipo de problemas comúnmente más cercanos a la realidad. Su solución comienza con el conocimiento de los valores de frontera del potencial, de la intensidad del campo eléctrico y de la densidad de corriente. A partir de esta información se aplica la ecuación de Poisson, la *ecuación de continuidad* y alguna relación que exprese las fuerzas sobre las partículas cargadas, tal como la *ecuación de la fuerza de Lorentz* o la *ecuación de difusión*, para en últimas resolver todo el sistema de ecuaciones simultáneamente.

No obstante, en ciertas ocasiones cuando los problemas presentan condiciones de frontera debidas a conductores que se mantienen a determinados potenciales, la situación suministra mayores dificultades sobre todo en tres dimensiones. Por lo tanto es imposible proporcionar pautas generales para hallar soluciones en tales casos.

4.1 APLICACIÓN:

Capacitor de placas paralelas con nube de cargas negativas

Considérese el arreglo de placas paralelas mostrado en la figura 12, donde las placas están dispuestas de modo que, la distancia de separación entre sus superficies interiores es igual a l y de acuerdo con el sistema de referencia, la placa izquierda esta ubicada en $x = 0$ y la otra en $x = l$. Se debe tener en cuenta que las placas han sido sometidas a una diferencia de potencial V_b y además que ambas se encuentran al vacío. De esta manera, cuando se calienta la placa ubicada en $x = 0$ potencial es cero ($\Phi = 0$), se presenta un movimiento térmico que permite la liberación de electrones desde la superficie de este conductor (fenómeno de emisión termoiónica), hacia la superficie del otro conductor, que se encuentra a un potencial mayor ($\Phi = V_b$). De esta forma, los electrones que han escapado forman una carga espacial en la interfase de las dos placas y mientras se mantenga la diferencia de potencial entre ambas, habrá un paso continuo de electrones desde el emisor o cátodo hacia el colector o ánodo. Este arreglo es conocido con el nombre de diodo o tubo al vacío de dos elementos.

La finalidad de este ejercicio es encontrar la distribución de potencial entre las placas, sujetas a las condiciones de frontera especificadas.

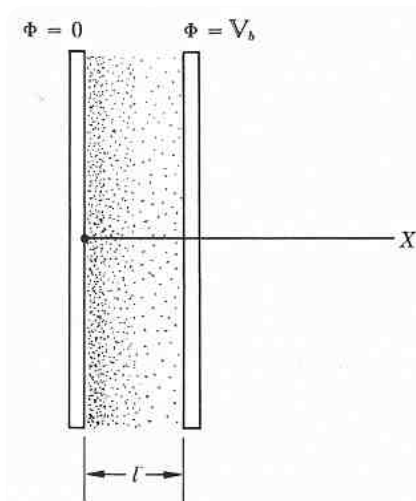


FIGURA 16. Capacitor de placas paralelas con nube de cargas negativas.

Solución .

Antes de comenzar con el desarrollo cabe citar que pareciera en este problema, que la densidad volumétrica de carga fuera no solo función de coordenadas de posición, sino también de tiempo, es decir $\rho(x,t)$; puesto que se involucran movimiento de cargas. Sin embargo, este incierto puede ser aclarado ya que si se analiza un punto cualquiera entre las dos placas, se encontrara que el movimiento de cargas por unidad de tiempo en dicho punto permanece constante, lo cual implica que la corriente es independiente del tiempo, y por lo tanto se puede considerar que la densidad volumétrica de carga es función única de coordenadas $\rho(x)$.

Para facilitar los cálculos se considera que la distancia de separación l entre las dos placas es mucho menor, en comparación con el largo de las mismas, de modo que, se pueden ignorar los movimientos en direcciones transversales. De esta manera, la ecuación de Poisson puede escribirse

$$(1) \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

donde, las condiciones en la frontera que deben satisfacer la solución a esta ecuación son:

$$A: \quad \Phi = 0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

$$B: \quad \Phi = V_b \quad \text{en} \quad x = l$$

$$C: \quad E = -\frac{d\Phi}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

Esta ultima condición, como resultado de que los electrones emitidos experimentan una fuerza de repulsión de otros electrones, lo cual conlleva a considerar su energía inicial de valor despreciable y por lo tanto, la velocidad inicial igual a cero. Así entonces, la velocidad del electrón a una distancia x teniendo en cuenta la relación

existente entre la energía cinética de un electrón con la energía cinética que adquiere del campo es

$$(2) \quad v = \sqrt{\frac{2e\Phi}{m}}$$

Los electrones en movimiento constituyen una corriente estacionaria de densidad

$$(3) \quad J = -\rho v$$

Usando (2) para sustituir (3) y despejando ρ se tiene

$$(4) \quad \rho = -J \sqrt{\frac{m}{2e\Phi}}$$

Sustituyendo (4) en la ecuación de Poisson (1) queda

$$(5) \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e\Phi}}$$

Al multiplicar (5) por $\frac{d\Phi}{dx}$, se tiene

$$\frac{d\Phi}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2$$

por lo tanto (5) tiene la forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} \Phi^{-1/2} \frac{d\Phi}{dx}$$

simplificando esta ecuación, encontramos

$$(6) \quad d \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{2J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} \Phi^{-1/2} d\Phi$$

El integrado queda

$$(7) \quad \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} \Phi^{1/2}$$

rescribiendo (7), se obtiene

$$\Phi^{-1/4} d\Phi = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2}} \Phi^{1/2}$$

Al integrar de nuevo, se obtiene

$$(8) \quad \frac{4}{3} \Phi^{3/4} = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}} x + C_1$$

Donde C1 es una constante. Al aplicar las condiciones de frontera A y C se obtiene en consecuencia que C1 = 0.

Encontrando Φ a partir de (8) se obtiene

$$(9) \quad \Phi = \left[\frac{3}{4} \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}} \right]^{4/3} x^{4/3}$$

De acuerdo con la condición de frontera B, (9) se convierte en:

$$(10) \quad V_b = \left[\frac{3}{4} \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}} \right]^{4/3} l^{4/3}$$

Al dividir (9) entre (10) obtenemos la distribución de potencial entre las placas

$$(11) \quad \Phi(x) = V_b \left(\frac{x}{l} \right)^{4/3}$$

5. APLICACIONES A LA ELECTROSTÁTICA

Tomando como base los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se presentan a continuación tres tipos de problemas acordes con las geometrías desarrolladas.

5.1 PROBLEMA 1:

Distribución del potencial eléctrico en el interior de una caja metálica

Una caja metálica en forma de cubo como se muestra en la figura 17, con dimensiones (a, b, c) en la dirección (x, y, z) respectivamente. Presenta las siguientes condiciones: la superficie del cubo esta aterrizada, excepto las caras para $z = c$ y $z = 0$, las cuales se encuentran aisladas del resto de la caja por pequeñas aperturas. Si a cada una de estas superficies se les aplica un potencial V_0 . Se necesita determinar la distribución del potencial en el interior de la caja metálica.

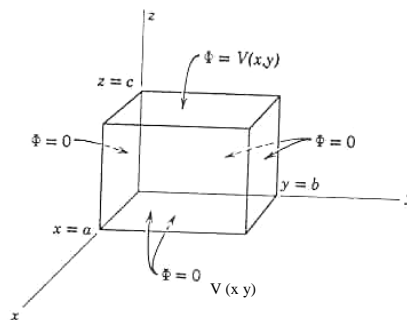


FIGURA 17: Caja metálica con dos caras a un potencial V_0 .

Solución.

El problema se encuentra relacionado con las variables (x, y, z) . Con el propósito de agilizar los cálculos y facilitar el manejo de las condiciones de frontera, se utilizará directamente la ecuación (2) de la sección 3.1, la cual tiene la forma

$$(1) \quad \Phi(x, y, z) = \left[(C \cos \alpha x + D \sin \alpha x)(F \cos \beta y + G \sin \beta y) \right. \\ \left. (A \cosh \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z + B \sinh \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) \right]$$

Ahora, estableciendo las condiciones de frontera se tiene

$$\begin{aligned} \Phi(0, y, z) = 0 & \quad \Phi(x, b, z) = 0 \\ \Phi(a, y, z) = 0 & \quad \Phi(x, y, 0) = V_0 \\ \Phi(x, 0, z) = 0 & \quad \Phi(x, y, c) = V_0 \end{aligned}$$

donde se encuentra

$$\begin{aligned} X(0) = C = 0 \\ X(a) = D \sin \alpha a = 0 \\ Y(0) = F = 0 \\ Y(b) = G \sin \beta b = 0 \\ Z(0) = Z(c) = V_0 \end{aligned}$$

por lo cual las soluciones de X, Y y Z son:

$$(3) \quad \begin{aligned} X(x) &= D \sin \alpha x \\ Y(y) &= G \sin \beta y \\ Z(z) &= A \cosh \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z + B \sinh \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z \end{aligned}$$

con estos resultados se puede escribir de nuevo la expresión (8) de la sección 3.1, obteniendo

$$(4) \quad \Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ H_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right. \\ \left. + P_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right\}$$

donde $H_{nm} = D_n G_m A_{nm}$ y $P_{nm} = D_n G_m B_{nm}$.

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, se hace

$$(5) \quad T_{nm} = H_{nm} \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} 0 \quad \text{para } z=0$$

$$(6) \quad K_{nm} = H_{nm} \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \quad \text{para } z=c$$

$$(7) \quad Q_{nm} = P_{nm} \sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} 0 \quad \text{para } z=0$$

$$(8) \quad L_{nm} = P_{nm} \sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c \quad \text{para } z=c$$

ahora, se determinaran los coeficientes dobles de la serie de Fourier, usando la ecuación (13) de la sección 2.2, así

$$T_{nm} = \frac{4V_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy$$

donde, el coeficiente es igual a

$$T_{nm} = \frac{16V_0}{nm\pi^2} \quad \text{para } n \text{ y } m \text{ impares}$$

$$T_{nm} = 0 \quad \text{para } n \text{ y } m \text{ pares}$$

Análogamente, se encuentra

$$K_{nm} = \frac{16V_0}{nm\pi^2}$$

$$Q_{nm} = \frac{16V_0}{nm\pi^2}$$

$$L_{nm} = \frac{16V_0}{nm\pi^2}$$

entonces para n y m impar, la solución a este problema es

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{16V_0}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right. \\
& + \frac{16V_0}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \frac{\cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z}{\cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c} \\
& + \frac{16V_0}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \\
& \left. + \frac{16V_0}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \frac{\sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z}{\sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c} \right\}
\end{aligned}$$

donde al manipular y simplificar la anterior expresión, se encuentra finalmente que la distribución de potencial en el interior de la caja, esta dado por

$$\begin{aligned}
(10) \quad \Phi(x, y, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{16V_0}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left[\cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z \right. \right. \\
& \left. \left. + \sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z + \frac{\cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z}{\cosh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c} + \frac{\sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} z}{\sinh \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} c} \right] \right\}
\end{aligned}$$

5.2 PROBLEMA 2:

Distribución del potencial eléctrico en el interior de un recipiente metálico cilíndrico

Un recipiente metálico de forma cilíndrica, de longitud L y radio a , se encuentra aterrizado, excepto la tapa superior para $z = L$, a la cual se le aplica un potencial V_0 , como se muestra en la figura 2. De acuerdo con las características citadas, se desea encontrar la distribución del potencial eléctrico dentro del recipiente.

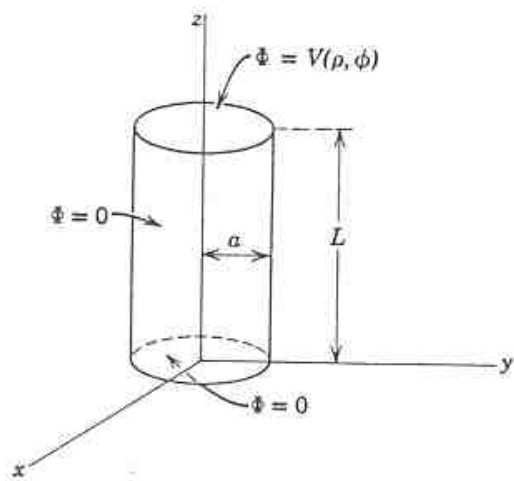


FIGURA 2: Recipiente cilíndrico metálico con su tapa superior a un potencial V_0 .

Solución.

Cabe aclarar que el problema se simplifica, ya que la distribución del potencial Φ , es independiente del ángulo azimutal ϕ , por lo tanto la solución a la ecuación (2), de la sección (3.3) presenta la siguiente forma

$$(11) \quad \Phi(\rho, z) = \left[\left(AJ_v \left(x_{vk} \frac{\rho}{a} \right) + BN_v \left(x_{vk} \frac{\rho}{a} \right) \right) (C \cosh kz + D \sinh kz) \right]$$

Ahora, aplicando las condiciones de frontera al problema se consigue

$$\begin{aligned}\Phi(0, z) &= \textit{finito} & \Phi(\rho, 0) &= 0 \\ \Phi(a, z) &= 0 & \Phi(\rho, L) &= 0\end{aligned}$$

donde se encuentra que:

- Para $\rho = 0$

$$R(0) = AJ_v(0) + BN_v(0) = \textit{finito}$$

Al analizar esta ecuación en relación con las graficas de J y N en la sección (2.4.1), se encuentra que $N_v(0)$ se indetermina, por lo tanto $B = 0$, entonces

$$(12) \quad R\left(x_{vk} \frac{\rho}{a}\right) = AJ_v\left(x_{vk} \frac{\rho}{a}\right)$$

- Para $z = 0$

$$Z(0) = C \cosh 0 + D \sinh 0 = 0$$

Analizando esta ecuación se encuentra que $C = 0$ es condición necesaria; por lo tanto

$$(13) \quad Z(x) = D \sinh kz$$

Ya que se han aplicado las condiciones de frontera, se puede escribir de nuevo la ecuación (11) como

$$(14) \quad \Phi(\rho, z) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[F_{vk} \left(J_v \left(x_{vk} \frac{\rho}{a} \right) \right) (\sinh kz) \right]$$

para cuando $z = L$, el potencial es $\Phi(\rho, L) = \Phi(\rho) = V_0$, entonces

$$\Phi(\rho) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[F_{vk} \left(J_v \left(x_{vk} \frac{\rho}{a} \right) \right) (\sinh kL) \right] = V_0$$

por consiguiente

$$\Phi(\rho) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_{vk} J_v \left(x_{vk} \frac{\rho}{a} \right) \right] = V_0$$

donde $G_{vk} = F_{vk} \sinh kL$. Aplicando las condiciones de ortogonalidad de la sección (2.4.2), se halla que

$$(15) \quad G_{vk} = \frac{2}{a^2 J_{v+1}^2(x_{vk})} \int_0^a \rho \Phi(\rho) J_v\left(x_{vk} \frac{\rho}{a}\right) d\rho$$

integrando entre 0 y a , se obtiene

$$G_{vk} = \frac{2V_0}{aJ_{v+1}(x_{vk})}$$

lo que conlleva a

$$(16) \quad F_{vk} = \frac{2V_0}{akJ_{v+1}(x_{vk}) \sinh kL}$$

finalmente sustituyendo (16) en (14) se encuentra que la distribución del potencial dentro del cilindro es de la forma

$$(17) \quad \Phi(\rho, z) = \frac{2V_0}{a} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\left(J_v\left(x_{vk} \frac{\rho}{a}\right) \right) \sinh kz}{kJ_{v+1}(x_{vk}) \sinh kL} \right]$$

5.3 PROBLEMA 3:

Distribución del potencial eléctrico en el interior y exterior de una esfera metálica

Encontrar la distribución del potencial Φ en el interior y exterior de una esfera metálica hueca de radio a , teniendo presente que ambos hemisferios se hallan aislados entre sí, y sometidos a diferentes potenciales. Donde al hemisferio superior se le aplica un potencial V_0 , mientras que al otro se le toma como punto de referencia (es decir se aterriza) tal como se muestra en la figura 19.

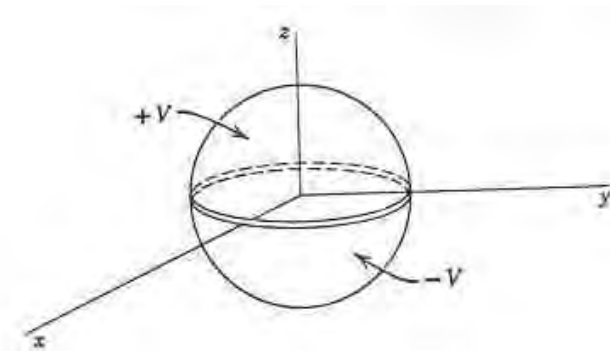


FIGURA 19: Esfera metálica con su hemisferio superior a un potencial V_0 .

Solución.

El problema se simplifica ya que la distribución del potencial Φ es independiente de φ , entonces la solución presenta la forma

$$(18) \quad \Phi(r, \theta) = (Ar^l + Br^{-(l+1)})P_l(x)$$

Aplicando las condiciones de frontera al problema se llega a

$$\Phi(a, \theta) = V_0 \quad ; \quad \text{Para } \pi/2 < \theta < 0$$

$$\Phi(a, \theta) = 0 \quad ; \quad \text{Para } 0 < \theta < -\pi/2$$

Entonces, se determina primero la distribución en el interior de la esfera para la región $0 < r < a$. Donde, para $r = 0$, se encuentra que $B = 0$, es condición necesaria para no indeterminar la función, por lo cual

$$(19) \quad R(r) = Ar^l$$

Ahora, escribiendo de nuevo la ecuación (18)

$$(20) \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x)$$

Para cuando $r = a$ en la región comprendida entre $\pi/2 < \theta < 0$, el potencial es $\Phi(a, \theta) = \Phi(\theta) = V_0$, por lo tanto

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(x) = V_0$$

por lo cual

$$\Phi(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x) = \begin{cases} V_0; & (\pi/2 < \theta < 0) \\ 0; & (0 < \theta < -\pi/2) \end{cases}$$

donde $C_l = A_l a^l$. Pero aplicando las condiciones de ortogonalidad de la sección (2.3), se halla que

$$(21) \quad C_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\theta) P_l(x) dx$$

lo que conlleva a

$$C_l = \frac{(2l+1)}{2} \left[\underbrace{\int_{-1}^0 \Phi(\theta) P_l(x) dx}_{\text{Para}} + \underbrace{\int_0^1 \Phi(\theta) P_l(x) dx}_{\text{Para}} \right]$$

por lo tanto

$$C_l = \frac{(2l+1)V_0}{2} \int_0^1 P_l(x) dx$$

donde el valor de A_l ahora es

$$(22) \quad A_l = \frac{(2l+1)V_0}{2a^l} \int_0^1 P_l(x) dx$$

Por consiguiente, la distribución en el interior de la esfera es

$$(23) \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l+1)V_0}{2a^l} \int_0^1 P_l(x) dx \right) r^l P_l(x)$$

Se continua ahora, con la determinación de la distribución del potencial en el exterior de la esfera. por lo cual, cuando $r \rightarrow \infty$, se encuentra que $A = 0$, es condición necesaria, entonces

$$(24) \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(x)$$

ahora evaluando la ecuación (24) para $r = a$ se consigue

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(x) = \begin{cases} V_0; () \\ 0; () \end{cases}$$

de donde

$$(25) \quad B_l = \frac{(2l+1)V_0}{2a^{-(l+1)}} \int_0^1 P_l(x) dx$$

para finalmente, expresar la distribución el potencial en el exterior de la esfera como

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l+1)V_0}{2a^{-(l+1)}} \int_0^1 P_l(x) dx \right) r^{-(l+1)} P_l(x)$$

6. PERSPECTIVAS DE DESARROLLO EN LA APLICACIÓN A SITUACIONES INGENIERILES.

Con lo que respecta a los tipos de situaciones evaluadas en la sección anterior, estas se pueden catalogar intrínsecas a un contexto de carácter teórico, ya que las condiciones en la frontera para las mismas fueron escogidas idóneamente con el propósito de buscar un acople perfecto con relación a los sistemas de coordenadas desarrollados y así, obtener la solución de las ecuaciones a través del método analítico de separación de variables. Sin embargo, cabe recalcar que los procedimientos analíticos empleados para la formulación y solución de tales situaciones teóricas, representan el sustento y la base imprescindible en la evaluación bajo condiciones reales.

En aplicaciones ingenieriles, el análisis de fallas y diseño de maquinas o sistemas relacionados con los fenómenos electromagnéticos, requiere usualmente del calculo del campo magnético. Por ejemplo, en el caso de las maquinas eléctricas de tipo inductivo, los procesos de conversión de energía electromecánica están relacionados con el campo magnético de la misma. Razón por la cual, a partir de este calculo es posible estimar parámetros necesarios en el diseño y análisis de operación, tales como: voltajes, corrientes, torques mecánicos y perdidas entre otros.

Básicamente la finalidad del calculo en una maquina eléctrica de tipo inductivo con un sistema periódico de bobinas, consiste en determinar la inducción del campo magnético \vec{B} a través de la distribución espacial dada por la densidad de corriente \vec{J} en los devanados de la maquina. En la mayoría de los casos este vector de densidad de corriente esta uniformemente distribuido en la sección Q del conductor y dirigido a lo largo del eje del mismo hacia el lado en que fluye la corriente I. La figura 20 muestra de forma clara la formación de la inducción del campo magnético en una espira conductora, al igual que el sentido de circulación del vector de densidad de corriente.

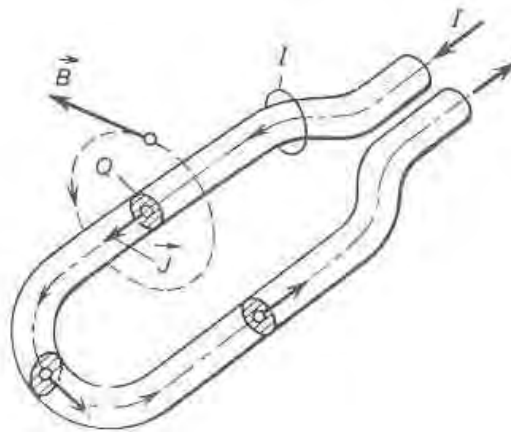


FIGURA 20. Formación del campo magnético en una espira conductora.

Ahora, se busca establecer analíticamente un sistema de ecuaciones que describa unívocamente el campo magnético en la maquina, para lo cual se parte de las *ecuaciones de Maxwell* aplicadas a los campos magnéticos estables, de donde se deduce que el vector de intensidad \vec{H} de este campo magnético debe satisfacer la ecuación,

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

al igual que el vector de inducción \vec{B} debe satisfacer la ecuación de continuidad,

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

lo cual significa que las líneas de campo magnético siempre presentan trayectorias cerradas. A su vez, la ecuación que permite establecer la relación entre la inducción y la intensidad del campo magnético se encuentra dada por,

$$(3) \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}$$

donde μ_a es la permeabilidad magnética absoluta del medio.

En una maquina eléctrica, los hilos conductores de los devanados generalmente se disponen en las ranuras de los circuitos magnéticos, de esta manera el campo magnético aparece en el volumen ocupado tanto por los circuitos magnéticos del estator como del rotor; al igual que en el entrehierro y en el espacio que rodea las partes frontales de los devanados, tal como se puede apreciar en la figura 21.

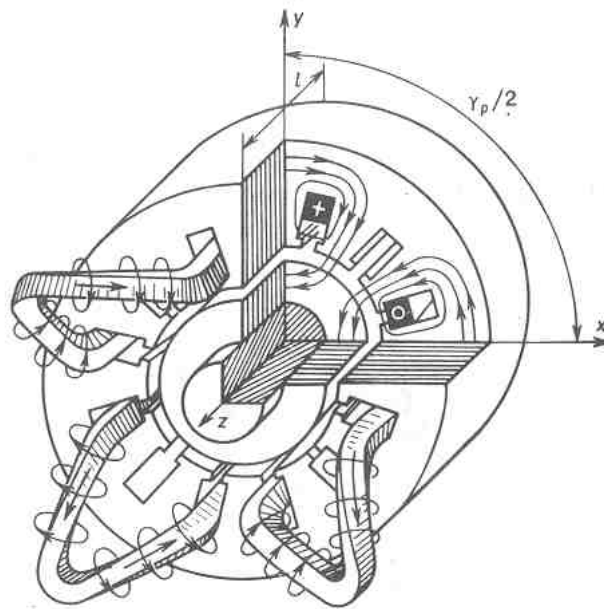


FIGURA 21. *Circulación del campo magnético en una maquina eléctrica de tipo inductivo con un sistema periódico de bobinas.*

Sin embargo, las ecuaciones lineales de campo (1), (2) y (3), establecidas anteriormente, no son suficientes para calcular el campo magnético \vec{B} ; ya que también se debe tener en cuenta las ecuaciones para las superficies que separan los

medios con diferentes permeabilidades magnéticas relativas y también las condiciones de frontera para las componentes tangenciales y normales de los vectores \vec{B} y \vec{H} del campo magnético en las superficies que separan los medios con diferentes permeabilidades. En algunas ocasiones es necesario además tener presente las propiedades de los materiales ferromagnéticos que se caracterizan por la variación de su permeabilidad magnética relativa en función de la intensidad del campo magnético $\mu_r = f(H)$.

En este punto surgen dificultades suplementarias a causa de que la disposición espacial mutua de los circuitos magnéticos y los conductores con corrientes siempre varia, por lo que se prevé que habría que repetir la solución para todas las posiciones que estos tomen. Para resolver este inconveniente es necesario hacer unas precisiones y suposiciones con el propósito de simplificar el desarrollo del problema. Así de esta forma no es conveniente calcular el campo de la maquina en todo el volumen de la misma, basta solo con estudiar el campo, dentro de los límites de un semiperiodo $Y_p/2$ aprovechando el carácter periódico del campo magnético en la maquina; relacionado con la periodicidad de distribución de las corrientes en el devanado. El semiperiodo del campo de la zona activa de la maquina se muestra en la figura 22.

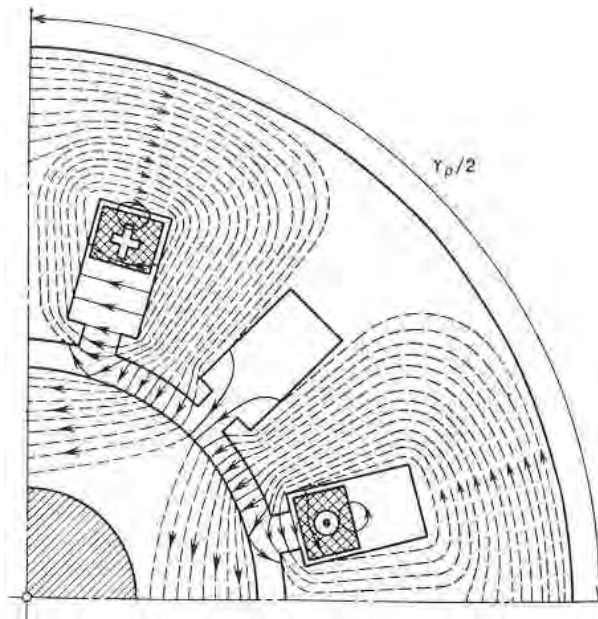


FIGURA 22. Elemento amplificado del campo magnético para un semiperiodo en una máquina eléctrica de tipo inductivo con un sistema periódico de bobinas.

Gracias a esta consideración se puede utilizar el método de superposición y determinar el campo magnético de la máquina como la suma de los campos de cada uno de los devanados y determinar a su vez, el campo del devanado como la suma de los campos creados por las corrientes en los sistemas periódicos elementales de las bobinas.

El campo magnético de los circuitos magnéticos, que se presentan en la figura 22, muestra líneas representadas de manera punteada; que corresponden a las regiones donde se considera una infinita impermeabilidad magnética; lo cual permite considerar la energía de este campo como igual a cero. Por esta razón, el estudio del campo solo se limita al espacio amagnético; para el cual se consideran tres campos característicos.

Como un primer campo se puede considerar el que se encuentra en la zona de las ranuras con corriente; el cual es un campo bidimensional que se repite en cualquier sección transversal de la maquina y sus líneas están situadas en el plano de estas secciones tal como se puede apreciar en la figura 23. Las líneas de este campo solo

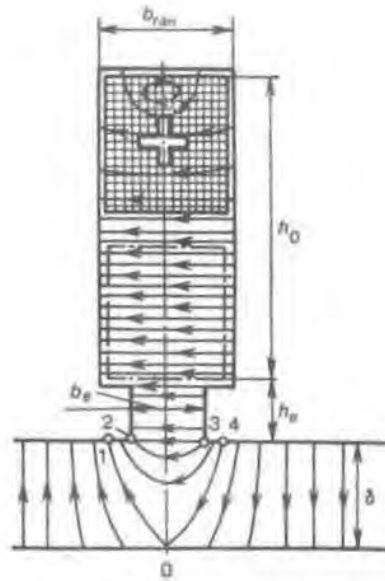


FIGURA 23. Elemento amplificado del campo magnético en la zona de la ranura con corriente

se encuentran acopladas con los hilos conductores de su propio devanado, no se acoplan con los devanados situados en otro circuito magnético y sus líneas no cruzan ninguna parte del entrehierro. Los campos de este tipo se denominan campos de dispersión, y se pueden calcular analíticamente teniendo presente la existencia de una corriente de distribución \vec{J} en la zona de las ranuras y también la forma que estas presentan, ya que solo es posible hallar su solución para ciertos casos particulares (por ejemplo, para ranuras de formas redondas o rectangulares). De esta manera la solución analítica resulta extensa, por lo cual para cálculos prácticos que involucren cualquier forma de ranura, se usan soluciones aproximadas obtenidas basándose en la idealización del cuadro del campo.

Como un segundo campo en la región amagnética, esta el que aparece en torno a las partes frontales de las bobinas fuera de los límites de los circuitos magnéticos. Las líneas de este campo presentan una configuración espacial complicada debido a la forma como se envuelve en las partes frontales de las bobinas; tal como se observa en la figura 24. La energía de este campo es insignificante por esto no se requiere gran exactitud en su cálculo, inclusive al considerar la influencia de este campo en la inductancia mutua entre los devanados, esta se puede despreciar.

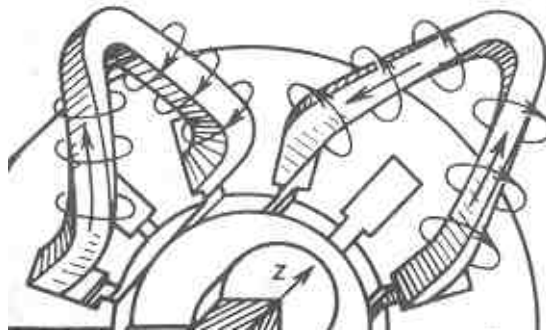


FIGURA 24. Campo magnético en las partes frontales de las bobinas.

Finalmente como un tercer campo esta el que se encuentra en la zona del entrehierro, limitado por los circuitos magnéticos del rotor y del estator. En el cálculo de la máquina eléctrica como tal, el papel más importante lo desempeña este campo, debido a que su energía supera de manera considerable a la energía de los otros dos campos citados anteriormente. Como se aprecia en la figura 21 las líneas de campo en el entrehierro están representadas por líneas continuas y dentro de la longitud l del circuito magnético están situadas en superficies perpendiculares al eje z , donde el propio campo se repite en cada una de estas superficies; lo cual permite considerar a este campo como de tipo bidimensional. También él determina el flujo acoplado y la inductancia mutua entre el devanado en cuestión y los devanados dispuestos en otro circuito magnético, esto como consecuencia de que todas las

líneas de este campo cruzan el entrehierro, razón por la cual también se le conoce como campo de inducción mutua. Una característica importante que facilita la búsqueda de este campo es que la zona donde se ubica no existe corrientes distribuidas ($\vec{J} = 0$). Todas las condiciones anteriores permiten emplear análogamente como se hizo para el caso de problemas electrostáticos con la noción de potencial electrostático escalar, la función auxiliar para campos magnéticos, conocida como *potencial magnético escalar*; representada por Φ_m . De esta manera entonces la intensidad \vec{H} de este campo en la zona del entrehierro, se expresa como

$$(4) \quad \vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m \quad (\vec{J} = 0)$$

ahora sustituyendo (4) en (3) se tiene

$$\vec{B} = \mu_a (-\vec{\nabla}\Phi_m)$$

Reemplazando esta expresión en (2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_a \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi_m)$$

y de aquí que

$$(5) \quad \vec{\nabla}^2\Phi_m = 0 \quad (\vec{J} = 0)$$

Obteniendo analíticamente de nuevo la ecuación de Laplace, pero ahora en la búsqueda del campo magnético, para encontrar la solución de un problema real. Como el campo en esta región es bidimensional; el potencial magnético escalar será función de las coordenadas x y y que están especificadas de acuerdo al sistema de referencia de la figura 21. Lo cual permiten escribir de nuevo la ecuación (5) como

$$(6) \quad \frac{\partial^2\Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_m}{\partial y^2} = 0$$

Ahora para conocer el comportamiento del potencial magnético escalar en cualquier punto de la zona del entrehierro se debe resolver la ecuación (6).

Para este propósito se debe tener en cuenta las condiciones de frontera en las superficies ferromagnéticas que corresponden a las corrientes instantáneas en las fases de los devanados. Estas condiciones en la frontera se prefijan en forma de distribución del potencial magnético escalar en las superficies. La determinación de esta distribución es un problema independiente que puede ser resuelto unívocamente si son conocidos el esquema del devanado y las corrientes instantáneas en sus fases. No obstante la solución de este problema es tanto más difícil cuanto más complicado es el esquema del devanado.

Teniendo presente las consideraciones hechas, puede pensarse en solucionar la ecuación (6) por el método analítico de separación de variables; pero para este caso la forma de las superficies ferromagnéticas no permiten elegir un sistema coordenado que se ajuste a dicha geometría; además aun si se pudieran ajustar, puede ser complicado satisfacer analíticamente las condiciones en la frontera como se habrá podido mencionar anteriormente.

Surge otra posibilidad de resolver analíticamente esta ecuación por *el método de mapeo conforme* que emplea el uso de *variable compleja*. Lo que se buscaría con este método, sería encontrar un mapeo conforme que transforme la región del entrehierro en una región más simple, tal como un disco o un semiplano. En estas condiciones puede resolverse la ecuación de Laplace sujeta a las condiciones de frontera transformadas para la nueva región. La solución final se obtendría al regresar a la región original del entrehierro por medio de la transformación inversa. Cuando se aplica el método de mapeo conforme a problemas con valor en la frontera en la teoría de potencial, la dificultad radica en encontrar una función analítica que mapee o transforme una región dada en una más sencilla. Para este propósito es necesario un poco de experiencia y un conocimiento detallado de las propiedades del mapeo de las funciones analíticas elementales.

Otra posibilidad para resolver esta ecuación bidimensional de Laplace, de manera no analítica; es mediante aproximaciones numéricas, tema que tiene una larga historia, pero que ha tomado considerable importancia en las últimas décadas debido al desarrollo y gran demanda que han tenido los computadores personales. De estos tipos de métodos desarrollados e implementados se pueden emplear en la solución de esta ecuación, el *método de las diferencias finitas*, que se aplicaría básicamente superponiendo una malla regular en la región del entrehierro. En cada punto de la malla la ecuación de Laplace, se le harían aproximaciones mediante segundas derivadas, de esta manera las ecuaciones algebraicas resultantes se resuelven mediante una técnica iterativa, para los valores del potencial en los puntos de la malla. Como un segundo método numérico se puede aplicar el *método de los elementos finitos*, en el cual se dividiría la región del entrehierro en subelementos adaptados a las fronteras, los cuales cubrirán la región sin traslaparse, tal como se muestra en el ejemplo de la figura 25, para el cálculo del campo en la ranura de un motor. En cada uno de estos elementos finitos se construirá una aproximación analítica sencilla de la solución. Las soluciones son necesarias para satisfacer las condiciones en la frontera y son continuas a través de las fronteras entre los elementos.

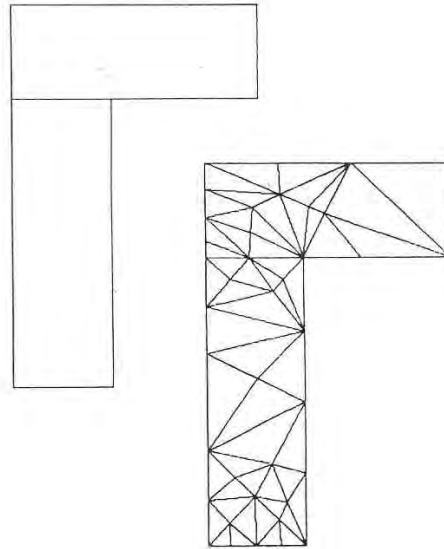


FIGURA 25. *Ranura de rotor de una maquina eléctrica y su representación en elementos finitos triangulares*

De los métodos mencionados anteriormente, aquel que presenta mayores ventajas para la solución de problemas reales es el método de los elementos finitos, ya que la técnica que él emplea, no se encuentra restringida por las formas geométricas que puedan presentarse, de esta manera mediante el uso de elementos triangulares, por ejemplo, puede tratarse cualquier región bidimensional como la del entrehierro, cuya frontera puede aproximarse satisfactoriamente mediante una serie de segmentos de recta. Donde la red de elementos triangulares que moldea al interior de la región del problema no es regular ni geométrica, siendo los triángulos de formas y dimensiones variables y siendo su interconexión de tal forma que no se sigue necesariamente un patrón regular.

Por lo planteado en esta sección, se ha podido observar que el procedimiento que se emplea en la solución de un problema real, esta acompañado de planteamientos

analíticos que facilitan la descripción de manera clara y precisa de los fenómenos físicos que se suceden. Esto permite tener una visión clara del problema que se este tratando y de alguna manera asumir condiciones que logran simplificar el mismo de manera considerable. De esta forma se entran a resolver las ecuaciones de Laplace o Poisson que fueron establecidas, generalmente mediante aproximaciones a través del método numérico que brinde las mejores ventajas. De aquí se deduce que tanto los procedimientos analíticos como numéricos actúan como conjunto y no como entes aislados, en el momento de resolver un problema de tipo real.

Por otra parte, al igual que se precisa en las maquinas eléctricas determinar la distribución del potencial escalar magnético en el entrehierro, surgen diversas situaciones en la ingeniería eléctrica que requieren una solución de la ecuación de Laplace o de Poisson. Por ejemplo, en la determinación de las propiedades ondulatorias de una línea de transmisión coaxial compuesta de conductores rectangulares, se requiere resolver la ecuación de Laplace, para encontrar la distribución de potencial eléctrico entre los conductores. También en el diseño de transformadores cuando se necesita encontrar la distribución del potencial escalar magnético en las regiones donde existe la presencia de conductores, se debe resolver la ecuación de Poisson. Lo anterior permite afirmar que son satisfactorias las perspectivas de desarrollo para con estas ecuaciones, en la aplicación de problemas en ingeniería.

8. CONCLUSIONES

Siempre que se intente resolver analíticamente un problema en electrostática, a través de la ecuación de Laplace, por el método de separación de variables, es muy importante tener bien comprendido el modelo físico establecido, con el propósito de hacer la elección del sistema coordenado apropiado a la geometría que se presenta, de acuerdo a lo desarrollado, bien sea en coordenadas cartesianas, esféricas o cilíndricas. Ya que una consideración acertada facilita los desarrollos subsiguientes. Otro aspecto a tener en cuenta en la búsqueda de la solución para coordenadas esféricas y cilíndricas de esta ecuación son, las ecuaciones de Bessel y Legendre que se derivan posterior a la separación de variables. Estas ecuaciones tienen tipos de soluciones especiales, que hacen que los desarrollos matemáticos sean extensos. Por tal razón se debe adquirir cierta familiaridad con este tipo de ecuaciones, para lo cual se recomienda trabajarlas por separado, antes de entrar a resolver problemas en particular.

La ecuación de Poisson en comparación con la ecuación de Laplace no presenta las mismas condiciones, para establecer un método analítico a seguir en su resolución. Esta recibe un tratamiento característico de acuerdo al tipo de problema con que se esté trabajando y su proceso de solución se puede hacer mas elaborado en la medida en que se aumente el numero de variables de la función potencial.

Las ecuaciones de Laplace y Poisson adquieren una marcada importancia, cuando son aplicadas, en la resolución de problemas bajo condiciones físicas reales que se presentan frecuentemente en la ingeniería eléctrica. Tomando una importancia especial en el campo de las maquinas rotatorias, donde antes de entrar a resolver las ecuaciones se hace necesario tener un conocimiento claro del fenómeno físico que se sucede en su interior que va expresado con métodos analíticos. Esto consecuentemente hace que se tengan perspectivas de desarrollo en la universidad con un curso de diseño de maquinas o rediseño de maquinas.

Al entrar a resolver la ecuación de Poisson o Laplace a través de un método numérico, con el propósito de resolver un problema específico en ingeniería eléctrica, es muy importante tener presente los procedimientos analíticos que pueden llevar a simplificar el problema, además de la claridad de todo el modelo físico del problema que se analiza con el propósito de entender e interpretar correctamente los resultados numéricos que se obtengan.

9. BIBLIOGRAFÍA

DORF, Richard C. Circuitos Eléctricos Introducción al Análisis y Diseño. Segunda edición, Alfaomega Grupo Editor S.A., México, 1995.

ELLIOTT, Robert S. Electromagnetics History, Theory and Applications. IEEE, 1993.

FEYNMAN, Richard; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew. Física Feynman. Primera edición, Vol.2: Electromagnetismo y Materia, Addison Wesley Iberoamericana, S.A., E.U.A, 1987.

GRU, Jaime. Conferencias sobre teoría electromagnética. Universidad del Valle.

HAYT, William H. Teoría Electromagnética. Quinta edición, McGraw Hill, Mexico, 1991.

HSU, Hwei P. Analisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano, S.A. Colombia, 1973.

IVANOV, Smolenski A. V. Maquinas Electricas. Tomo 3, Editorial Mir. Moscu, Rusia, 1984.

JACKSON, John David. Classical Electrodynamics. Second edition, Jhon Wiley & Sons, New York, 1962.

JOHNK, Carl T. A. Teoria Electromagnética Principios y Aplicaciones. Primera edición, Editorial Limusa S.A., Mexico, 1984.

KOPYLOV I.P. Mathematical Model Of Electric Machines. First publishers, Mir Publishers Moscow ,1984

KRAUS, John D. Electromagnetismo. Tercera edición, McGraw Hill

KREYSZING, Erwin. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Primera edición, Vol.1, Editorial Limusa S.A, Mexico, 1976.

KREYSZING, Erwin. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Primera edición, Vol.2, Editorial Limusa S.A., Mexico, 1976.

MARSHALL, Stanley V.; DUBROFF, Richard E.; SKITEK, Gabriel G. Electromagnetismo Conceptos y Aplicaciones. Cuarta edición, Printice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1997.

O'NEIL, Peter V. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Tercera edición, Vol.1, Compañía editorial Continental S.A., 1994.

PURCELL, Edward M. Electricidad y Magnetismo. Vol.2: Berkeley Physics Course, Editorial Reverte, S.A., España, 1973.

REITZ, John R.; MILFORD, Frederick J.; CHRISTY, Robert W. Fundamentos de la Teoría Electromagnética. Cuarta edición, Addison Wesley Iberoamericana, E.U.A., 1996.

SPIEGEL, Murray R. Teoría y Problemas de Análisis de Fourier, serie de compendios Shaum. Primera edición, Mc Graw Hill, Mexico, 1976.

ZILL, Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica S.A., Mexico, 1988.