Uso de herramientas computacionales para el aprendizaje de las matemáticas

Oswaldo Rodríguez Díaz*
Walter F. Castro G.**

Resumen

En el presente artículo se discute la introducción de herramientas computacionales como instrumentos en la formación matemática de los estudiantes, se presentan algunas de las propuestas contemporáneas en educación matemática y se ofrecen algunas instancias de uso de un emulador de un sistema de cálculo simbólico en el curso de matemáticas I, brindado a un grupo piloto de la Facultad de Ingeniería.

Palabras clave: educación matemática, tecnología, calculadora, modos de representación, visualización, significado.

Abstract

In the paper it is discussed the introduction of computational tools in the mathematical training of students, it is shown some of the current proposals related to mathematical education and some examples are given in the use of an emulator of a symbolic system to a pilot course in Mathematics I, offered to engineering students.

Key words: mathematical education, technology, calculators, modes of representation, visualization, meaning.

* Matemático Universidad del Valle, Especialista en Sistemas de Información en Univalle, Especialista en Educación Virtual. ILCE México convenio con CUAO, Magíster en Ciencias Computacionales con énfasis en Redes. ITESM, México. Docente del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas. UAO. Integrante del Grupo de Educación Matemáticas y Tecnología de la UAO. orodriguez@uao.edu.co

** Matemático, Universidad del Valle, Licenciado en Educación, Universidad del Valle, Magíster en Matemáticas, Universidad del Valle. Docente del Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Pontificia Universidad Javeriana, Cali. wcastro@puj.edu.co

Fecha de recepción:14/12/04 fecha de aprobación:18/02/05

Introducción

Los avances de la ciencia y la tecnología —la escritura, el papiro, el papel, la imprenta, la radio, etc.— han cambiado la forma en que los seres humanos trabajamos, nos divertirnos, nos relacionamos y aprendemos. La situación no es muy diferente ahora con las nuevas tecnologías de la computación y de la comunicación.

Los nuevos avances en la tecnología tienen muchas potencialidades para ser usadas en la formación matemática y científica de los estudiantes, y ello como respuesta a las dificultades atávicas que se experimentan en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, que de acuerdo con Rico (1997) se localizan principalmente en:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Actitudes asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas

Además de:

- Descontextualización y *abstracción* de los contenidos.
- Utilización de un lenguaje formal.
- Valoración del producto, ignorando el proceso seguido.
- Metodología deductiva, instructiva y repetitiva, en abandono de la creatividad y la originalidad.

Frente a una problemática tan extendida y compleja, es pertinente considerar el uso de nuevas herramientas y metodologías que prometan ser de utilidad para profesores y estudiantes; la pertinencia en el uso de herramientas computacionales está justificada por algunos reportes favorables; como se puede deducir de una revisión investigativa realizada por Dunham[1] (1993), quien reporta que muchos estudiantes que usan la tecnología de las calculadoras están mejor capacitados para: Relacionar las gráficas con sus ecuaciones, leer e interpretar información gráfica, obtener más información de las gráficas, simbolizar y comprender mejor las conexiones entre representaciones gráficas, numéricas y algebraicas; además exhiben estrategias flexibles ante la resolución de problemas, demuestran mayor inclinación hacia la resolución de tareas complejas, se concentran más en el problema y no en la manipulación algebraica, resuelven problemas no rutinarios que no se pueden resolver por técnicas algebraicas.

La actitud de negación en el uso de la tecnología en el aula de clase no es un fenómeno extraño, ya Sócrates se quejaba que los alumnos tomaban nota de las enseñanzas que se impartían. Negaba Sócrates de esta forma el uso de la tecnología que permitía consignar en manuscritos las enseñanzas que los filósofos brindaban a los jóvenes griegos.

Los computadores, las calculadoras y el estudio de las matemáticas

En el contexto de la incorporación de la tecnología en la educación

Los nuevos avances en la tecnología tienen muchas potencialidades para ser usadas en la formación matemática y científica de los estudiantes, y ello como respuesta a las dificultades atávicas que se experimentan en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

1. Dunham, Penélope GH(1993). "Does using calculators work". "The jury is almost in".UME Trends, 5(2),8-9.

matemática, se afirma que los computadores y calculadoras incrementan la capacidad de "abstracción" del estudiante para comprender algunos conceptos o "visualizar", Zimmerman y Cunninghan (1991), comportamientos complejos.

Zimmerman y Cunninghan (1991) se refiere a la visualización para *"describir los procesos de producción o uso de representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas..."*

Asociado al concepto de "visualización" en matemáticas está el de "abstracción", que el *Diccionario de Filosofía,* de Ferrater Mora, Editorial Ariel, 1979, define como *"el acto de sacar algo de alguna cosa, separar algo de algo, privar a alguien de algo, poner algo aparte, arrancar algo de alguna cosa, etc. El correspondiente nombre es* αφαιρεσιζ *que se traduce por 'abstracción' y que significa la acción y efecto de «sacar», «arrancar», «privar», «separar»"*.

La visualización y la abstracción son dos conceptos fuertemente vinculados en los procesos de aprendizaje de las matemáticas; la experiencia de exploración que llevamos a cabo nos permitió evidenciar durante las prácticas docentes, donde la calculadora y los computadores estuvieron presentes, que la "abstracción" no es la capacidad de "ver" objetos que no existen, sino la capacidad de ver objetos que "sí" existen, la abstracción la "definimos" como la capacidad de "representar" un objeto por referentes equivalentes o usando varios modos de representación; así la abstracción es una cualidad inherente a cada objeto matemático, en lugar de ser una valoración genérica para las matemáticas. Los objetos son abstractos; en tanto que los individuos que trabajan con ellos no los logran expresar usando otros modos de representación.

Señala Godino (1994) que "La complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos[2] utilizados en la actividad matemática (uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc)," por lo cual interesa analizar no sólo el "significado" de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos "objetos matemáticos".

Si aceptamos que un "objeto matemático" está definido por la concurrencia de situaciones-problemas, técnicas, conceptos, proposiciones, argumentaciones teóricas, entonces veremos que la configuración de los conceptos matemáticos en el ser humano es una actividad compleja en la cual toda ayuda orientada a la construcción de una red semántica[3] de "significados" relacionados es bienvenida.

Brown, T (1997) considera cuatro esquemas para explicar cómo las personas relacionan las acciones a los resultados, en el proceso de dar "sentido" o buscar "equivalentes" que usamos para orientar la introducción de las calculadoras y los computadores en los procesos de

2. Godino y Batanero (1998) bosquejan un modelo teórico que comprende tres entidades elementales de representación: Entidades Ostensivas: todo tipo posible de representación usada en matemáticas, tales como: símbolos, gráficas, tablas, diagramas, etc. Entidades Extensivas: problemas, fenómenos y aplicaciones. Entidades Intensivas: ideas matemáticas, generalizaciones, abstracciones, procedimientos y teorías. Además de: Entidades Actuativas: acciones que son llevadas a cabo por los estudiantes para resolver los problemas, tales como generalizaciones, operaciones, descripciones, etc.

3. La voz "semántica" tiene como sinónimo "con significado" y se suele contraponer a "sintáctica" o con sintaxis. Una "red semántica" es un esquema de representación del conocimiento en que los objetos o los conceptos se almacenan como nodos (sinónimo, vértices) de un gráfico y se enlazan entre sí por relaciones etiquetadas tales como 'es _ un" o "tiene _ un". Por ejemplo *PERRO* "es _un" *ANIMAL* / *PERRO* "tiene _ un" *RABO*. Allí *PERRO* es un nodo con enlaces a otros dos nodos. El correlato neurológico puede ser que cada nodo sea una o presumiblemente más neuronas. Cada neurona sería así una unidad de información y cada enlace sería una sinapsis. Nótese que la red semántica siempre marca salidas del nodo con análisis (PERRO, en este caso), como una neurona que tiene muchas ramificaciones o dendritas de salida. Si en cambio el punto de vista es de entradas hacia la neurona, se trataría de otra cosa, ahora de una red sintáctica de representación del conocimiento. Algunos autores incorporan una tercera red, llamada pragmática (Esto surge de la ciencia de los signos, esto es, de sus dos escuelas, la Semántica y la Semiología). http://club.telepolis.com/ohcop/semantic.html.

enseñanza de las matemáticas. Se cree oportuno usar varios sistemas de representación para favorecer la movilidad desde un nivel de comprensión llamado *"Aperceptual"* en el cual el estudiante percibe los signos matemáticos sin plantear relaciones vinculantes, hasta un nivel llamado *"Referencial"* en donde se generan "imágenes mentales" y relaciones vinculantes a otras formas de representación y de conceptos.

Considera Brown, T (1999) que las representaciones ostensivas permiten expresar y comunicar estructuras mentales y operaciones, manipular transformaciones y representaciones.

Las posibilidades que ofrecen hoy en día las calculadoras y los computadores como instrumentos útiles en los procesos instruccionales y de aprendizaje son numerosas. Waits (1996) reporta diez actividades fundamentales que pueden realizarse con la calculadora. Estas actividades son:

1. Problemas de acercamiento numérico.
2. Uso de manipulaciones analíticas para resolver ecuaciones e inecuaciones, y posterior soporte utilizando métodos visuales.
3. Uso de métodos visuales para resolver ecuaciones e inecuaciones, para después confirmarlos utilizando métodos algebraicos.
4. Modelado, simulación y solución de problemas.
5. Uso de escenarios visuales generados por computadora, para ilustrar conceptos matemáticos.
6. Uso de métodos visuales para resolver ecuaciones e inecuaciones, las cuales no pueden ser resueltas utilizando métodos algebraicos.
7. Conducir experimentos matemáticos, proponer y probar conjeturas.
8. Estudiar y clasificar el comportamiento de diferentes clases de funciones.
9. Pronosticar los conceptos de cálculo.
10. Investigar y explorar varias conexiones entre diferentes representaciones de una situación problema.

Las calculadoras o los computadores pueden ampliar los recursos que los estudiantes emplean para resolver problemas, el mero hecho de usar una calculadora para dibujar una gráfica como una ayuda para resolver un problema no descalifica la práctica como "no matemática", es el significado, y la forma de darle sentido "al conjunto de hechos y signos", y no las formas de los sistemas de signos[4] lo que determina lo que es matemático; creemos por el contrario que la calculadora y los computadores pueden enriquecer y favorecer el uso del pensamiento matemático en contextos más cercanos a lo que es el proceso de producción y de uso de las matemáticas.

La visión de la matemática como una ciencia prístina, terminada y perfecta tiene su origen en el trabajo de los griegos, y su acepción como "una ciencia lógico-deductiva" se refiere a su forma de argumentación, pero no a su forma de creación y uso. No se desea discutir esta posición epistémica platónica, sólo agregar que ella no pue-

4. Peirce, en 1902, nos da la siguiente definición de signo: "Un signo, o Represetamen, es un Primero que está en tal relación triádica genuina con un Segundo, llamado Objeto, como para ser capaz de determinar a un Tercero, llamado su Interpretente, a asumir con su Objeto la misma relación triádica en la que él está con el mismo Objeto. La relación triádica es genuina, vale decir, sus tres miembros están ligados entre sí de modo tal que no se trata de un complejo de relaciones diádicas".

El significado es una posibilidad tanto de relacionar como de interpretar. De ello se deduce que el Nivel Semántico (significado) está intensamente ligado, en una relación triádica genuina, por otra parte, con el Nivel Sintáctico (relación); y por otra parte, con las prácticas culturales (Nivel Pragmático) del correspondiente grupo social.

Un conjunto de "signos" y las formas como se relacionan entre sí generando nuevos significados es lo que se llama "un sistema de signos".

de ser la base para una teoría sobre formación matemática.

De otro lado, en la enseñanza de las matemáticas es tradicional que se ponga mucho énfasis en el dominio de procedimientos o algoritmos, lo cual limita el campo "semántico" de significados y se ofrece una visión ostensiva de la misma, termina por creerse que sólo aquello que contiene signos "matemáticos" es matemático, y en ese orden de ideas, cuando no se hace énfasis en el estudio de las reglas de operación simbólica y cuando se usan herramientas diferentes del lápiz y el papel en el estudio de las matemáticas, se considera que se está yendo en contravía en términos de los objetivos de la formación matemática.

Sí el estudio de las matemáticas se define sólo en términos de "operaciones" y "relaciones" entre signos, es decir, en términos sintácticos, entonces ciertamente la calculadora y el computador deben ser excluidos del proceso de formación "matemática", término este que debería ser reemplazado por *formación en operación con reglas y sistemas de signos matemáticos*.

Se considera que instrumentos tecnológicos tales como la calculadora y el computador permiten configurar los conceptos desde diversos referentes, por tanto su uso podría mejorar la formación matemática de los estudiantes en lugar de empeorarla, dado que la calculadora, usada apropiadamente, podría ayudar a diseñar instancias donde la matemática se utilice en resolución de problemas que asemejen problemas cotidianos, en los contextos propios de uso de las temáticas propias de los cursos universitarios.

En el campo de la Educación Matemática ya no se pregunta si la calculadora o el computador se deben usar, la pregunta es: ¿Cómo usarlos para ofrecer una formación matemática y científica acorde con las intenciones curriculares de la educación matemática?. Existe un interés creciente en buscar alternativas para resolver la problemática generada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuando se involucran las calculadoras y los computadores.

Relaciones entre el uso de tecnología y visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las calculadoras y los computadores también pueden considerarse como herramientas de visualización que Zimmerman y Cunningham (1991) define así: *"Tomamos el término visualización para describir los procesos de producción o uso de represetaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano o generados por computadora"*.

La *"visualización"* no sólo se define en términos fisiológicos como el acto de ver, sino, además, como el proceso cognitivo de comprender y es en este aspecto que se amerita una indagación en el aula de clase, para determinar en qué medida la *"visualización"* en el sentido de Zimmerman y Cunninghan es una alternativa para ser considerada en el proceso de formación matemática, vía el uso de la calculadora y el computador.

En el contexto de la formación matemática, se plantea la pregunta de cómo guiar a los alumnos a construir *conceptos,* a partir de conocimientos previos. Muchos autores han propuesto modelos o han generado investigaciones al respecto, entre otros tenemos:

Para Eisemberg y Dreyfus (1989) en matemáticas muchos conceptos y procesos podrían ligarse a interpretaciones visuales, esto implica que la visualización podría favorecer el aprendizaje.

Para Bishop (1989), la visualización es un proceso mental interno y por lo tanto muy particular de cada individuo. Esto indica que se puede estimular y es aquí donde la calculadora o una computadora ayudan al proceso de visualización.

Bishop (1989), para el caso de la computadora dice que ésta ha desempeñado un papel importante en los trabajos de investigación relativos a la visualización, con resultados positivos que parecen indicar que el poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental e incluso la comprensión de ideas algebraicas.

Para Hitt (1995), la promoción de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas permite hacer simulaciones y a través de ellas se construye un puente entre las ideas intuitivas de un alumno y los conceptos formales. En esta apreciación la calculadora y la computadora son herramientas importantes en la enseñanza de las matemáticas.

En este contexto de la visualización, Hitt (1995), menciona que: *"la visualización de los conceptos matemáticos no es una actividad cognitiva trivial: Visualizar no es lo mismo que ver. En nuestro contexto, visualizar es la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión"*.

En el mismo orden de ideas Hitt (1998), dice que *"la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representaciones a otro"* y que *"investigaciones recientes sobre los sistemas semióticos de representación han puesto de manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos para el aprendizaje de la matemática"*. De las citas anteriores se puede colegir que la calculadora y la computadora tienen un potencial muy grande ya que permiten hacer representaciones de los conceptos matemáticos desde lo algebraico, lo numérico y lo gráfico.

Metodología

El Grupo de Educación Matemática y Tecnología, adscrito al Departamento de Matemáticas, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Occidente asumió la exploración del uso de las calculadoras y los computadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, orientada a:

1. Analizar el potencial y las limitaciones de la tecnología de calculadoras y computadores, en particular en el curso de Matemáticas I (Números reales, álgebra, trigonometría y funciones de valor y variable real).
2. Someter a experimentación una propuesta de innovación educativa.
3. Recavar información para consolidar propuestas posteriores de investigación en educación matemática.

Algunas de las preguntas que orientaron la exploración, relacionadas con el estudiante, el docente y con el conocimiento matemático, son:

En relación con el estudiante:

- ¿Cómo usa el estudiante la calculadora y el computador para ganar comprensión y dar respuestas a las cuestiones planteadas?
- ¿Cuál es el grado de flexibilidad y transferencia del conoci-

Sí el estudio de las matemáticas se define sólo en términos de "operaciones" y "relaciones" entre signos, es decir, en términos sintácticos, entonces ciertamente la calculadora y el computador deben ser excluidos del proceso de formación "matemática", término este que debería ser reemplazado por formación en operación con reglas y sistemas de signos matemáticos.

mientos significado con el apoyo de la calculadora? ¿Está limitado el conocimiento adquirido al ámbito tecnológico únicamente?

- ¿En qué medida las respuestas de los estudiantes son resultado de la "comprensión conceptual" y no del mero uso de la calculadora y el computador?

El docente:

- ¿Qué tipos de tareas o actividades escolares potencian el desarrollo del pensamiento avanzado en relación con conceptos tales como los números reales, el álgebra y las funciones de valor y variable real?
- ¿Pueden usarse los diversos sistemas de representación provistos por la calculadora para movilizar la argumentación en matemáticas?

El conocimiento matemático:

- ¿El uso de la calculadora crea obstáculos epistemológicos?, es decir ¿Qué tipos de abducciones incorrectas pueden producirse por el uso de la calculadora? y, si es el caso, ¿cómo pueden evitarse? ¿Qué tipos de situaciones didácticas deben plantearse al estudiante para evitar generalizaciones incorrectas?
- ¿Es la significación obtenida con la ayuda de la calculadora lo suficientemente robusta de tal suerte que favorezca y estimule una construcción matemática conceptual sólida?

Con base en los cuestionamientos anteriores, el Grupo adelantó la indagación que se llevó a cabo durante el primer semestre 2004, en un curso piloto de Matemáticas I, ofrecido para la Facultad de Ingeniería, en la jornada nocturna.

A continuación ofrecemos la experiencia de uso de la calculadora en el curso de Matemáticas, además de mostrar algunas de las Guías[5] diseñadas, el trabajo de los estudiantes, y algunas conclusiones obtenidas al finalizar la experiencia.

La introducción del recurso tecnológico

La introducción de la calculadora se hizo a través del emulador[6] para HP49G,[7] y los temas en los cuales se usó fueron: álgebra de expresiones algebraicas y álgebra de funciones de valor y variable real.

Las Guías de trabajo:

La introducción del emulador en las prácticas estudiantiles se hizo mediante la entrega de Guías de trabajo, mismas que estuvieron divididas en categorías correspondientes al grado de conocimiento en el manejo del recurso y uso del recurso para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Las primeras Guías de trabajo se desarrollaron sobre el tema de factorización y álgebra de expresiones algebraicas. Su objetivo inicial era familiarizar a los estudiantes con los comandos y posibilidades de cálculo simbólico y numérico de la calculadora.

5. Por el nombre de Guía se entiende todo tipo de documento entregado a los estudiantes en el cual se proponen actividades diversas tales como: ejercicios en clase, tareas, quices, exámenes.
6. El emulador es un software que imita en todo a la calculadora HP49G, cuyo costo en el mercado es de aproximadamente 149 dólares, lo cual hace casi imposible su uso generalizado por todos los estudiantes del curso. El software es de dominio público y se trabajó con este recurso en las salas de sistemas de la Universidad Autónoma de Occidente.
7. La calculadora gráfica programable tiene: 1.5MB de memoria de usuario (512KB RAM y 1MB Flash ROM para almacenamiento de datos); tiene varios sistemas de representación entre ellos: funciones cartesianas, paramétricas, polares, cónicas, de sucesiones ecuaciones diferenciales además de gráficos estadísticos; permite también análisis de funciones tales como valores extremos, pendientes, áreas, intersecciones en dos dimensiones. En tres dimensiones permite rotar las gráficas cartesianas. Más información se puede ver en el sitio http://www.hpcalc.org/hp49/

Después que los estudiantes se familiarizaron con los comandos básicos y con las diferentes formas de representación presentes en la calculadora y útiles a los objetivos de la indagación: representación gráfica cartesiana,[8] representaciones numéricas dadas por tablas y representaciones simbólicas, además de pasar de un modo de representación a otro dentro de la calculadora, se procedió a proponer de manera diacrónica ejemplos, ejercicios, tareas, exámenes en pareja y exámenes individuales en donde a la calculadora se le dio un papel importante en los procesos de exploración, significación y resolución del problema.

Las clases donde la calculadora fue usada fueron programadas en las salas de sistemas, y las Guías eran enviadas previas a la clase por correo electrónico y algunas copias eran llevadas a clase.

El diseño de las Guías

El trabajo de diseño de las Guías estuvo a cargo de los miembros del Grupo de Educación Matemática y Tecnología, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas. El proceso de diseño tuvo tres momentos:

1. Diseño de la Guía: Momento donde se tienen en mente los temas, las competencias matemáticas que se desean trabajar, las características técnicas de la calculadora y la forma como esas características técnicas se pueden relacionar con los conceptos matemáticos y las competencias objetivo de la actividad programada.
2. Evaluación de la interacción entre los estudiantes, la Guía los conceptos matemáticos motivo de estudio y la calculadora. Esto se hizo durante las prácticas que los estudiantes desarrollaban, llevando registro detallado de las preguntas y acciones de los estudiantes para resolver las cuestiones usando la calculadora como instrumento mediador.

   Para ayudarnos con el proceso de valoración de la Guía y de las acciones de los estudiantes frente a las cuestiones planteadas en ellas, se recogió un registro en disquete del trabajo desarrollado por cada estudiante o grupo de estudiantes al final de las prácticas, ya fuesen ejercicios en clase, tareas, exámenes cortos individuales o grupales.

   Los aspectos analizados en cada actividad fueron:

   - Comprensión de los conceptos matemáticos motivo de estudio.
   - Dificultades frente al manejo del recurso tecnológico; por ejemplo cómo pasar de la representación gráfica cartesiana de una función a su representación tabular.
   - Dificultades frente a la comprensión de las preguntas y acciones propuestas en la Guía.
   - Dificultades ante los diferentes modos de representación propuestos en las actividades de la Guía en tanto que estos están relacionados con los conceptos matemáticos.
   - Acciones de los estudiantes, vía el uso de la calculadora, de cara a las cuestiones matemáticas planteadas en las Guías.
3. Diseño de actividades basadas en las conclusiones resultantes de la confrontación entre los objetivos propuestos para la Guía, las acciones estudiantiles motivadas por la misma, los conceptos matemáticos puestos

8. La calculadora ofrece gráficas cartesianas, polares, paramétricas y gráficas de sucesiones.

en juego y el uso de los diversos modos de representación provistos por la calculadora.

Algunas de las Guías

A continuación se muestran algunas de las Guías trabajadas durante el curso, ellas van en orden temporal.

Primera Guía de trabajo

Actividades de refuerzo con la ayuda de la calculadora.

Objetivo

El objetivo de esta actividad es confrontar a los estudiantes con algunos de los errores aritméticos más frecuentes que aparecen en los desarrollos procedimentales. Lo que se propone es que se desarrollen los cálculos con la calculadora; se espera que las incongruencias aritméticas que aparecen favorezcan la identificación de los errores y de las propiedades cuya ausencia favorecen tales errores.

Actividad

1. Por medio de ensayo y error encuentre dos números naturales para los cuales la siguiente regla se cumpla.

   $$\sqrt[2]{a+b} = \sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$$

2. Considere la operación,

   $$\frac{2.3+5}{2} = 3 + 5 = 8,$$

➢ Desarrolle el lado izquierdo en la calculadora y verifique el resultado.

➢ Encuentre ejemplos en donde la propiedad sea correcta.

3. Considere la operación:

   $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$

➢ Calcule ambos lados y determine si es correcta.

➢ Encuentre números a y b tales que la afirmación siguiente sea correcta: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

4. Considere la expresión dada a continuación

   $$\frac{a}{b+c} \ (?) \ \frac{a}{b} + \frac{a}{c};$$

   con la ayuda de la calculadora efectúe las operaciones en cada lado al reemplazar los valores sugeridos, y compare los resultados, escriba los signos " = "ó " ≠ " en donde está el signo de interrogación.

➢ a = 3, b = 7, y c = 14

➢ a = 2 , b = 5, y c = 5

➢ a = 0, b = 7, y c = -3

Encuentre otros ejemplos en donde las dos expresiones a los lados del signo de interrogación sean iguales.

¿Puede decir por qué la regla no es válida en todos los casos?

5. *Halle el valor numérico de la expresión:

   $$\frac{l}{a} + \frac{l}{b} = \frac{l}{a+b} \quad \text{cuando:}$$

➢ a = 4 y b = -8

➢ a = 5 y b = -2

➢ a = 1 y b = -1.

Encuentre ejemplos en donde la propiedad sea correcta.

¿Puede justificar por que la propiedad no se cumple en todos los casos?

6. *Encuentre el valor numérico de la siguiente expresión: $a.(b.c) = a.b.a.c$. cuando:

➢ a = 2, b = -1 y c = 3

➢ a = 4, b = -3 y c = 5

➢ a = 1, b = 2 y c = 3

➢ a = 3, b = 0 y c = 4.

Encuentre ejemplos en donde la propiedad sea correcta.

¿Puede justificar por qué la propiedad no se cumple en todos los casos?

Segunda Guía de trabajo

Tarea número uno.

A continuación se dan dos ecuaciones,

1. $1/(x-5) + 1/(x + 2) = 4$. Página 65. 10d. Notas de Clase. Versión 4
2. $x = 1-\sqrt{(2-(x/2)9}$. Página 65. 11 b. Notas de Clase. Versión 4.

Usted debe:

- Obtener la solución con lápiz y papel.
- Verificar que las soluciones por usted obtenidas satisfacen la ecuación dada.
- Verificar la factorización lograda por usted con el comando Factor.

Posteriormente, y usando la calculadora-emulador desarrollar una exploración gráfica y numérica de las ecuaciones dadas.

A continuación se le recuerda lo que se hizo en clase y que constituye la "exploración" gráfica y numérica del problema.

1. Introducir cada lado de la ecuación en 
2. Dibujar de manera apropiada, si es del caso cambiando las ventanas (¡esto puede tomarle algún tiempo!).
3. Explore los puntos en donde las dos gráficas se cortan, esto lo puede hacer con los comandos **trace**[9] y (x , y).[10]
4. Obtenga una **tabla**[11] para verificar que los valores obtenidos por usted en la primera parte del ejercicio, y los observados mediante la exploración gráfica se encuentran de nuevo en la tabla, encuentre —en la tabla— los valores de x para los cuales las dos gráficas son iguales.

Para cada uno de los pasos anteriores (gráfica, exploración con Trace y (x , y), tabla) provea la gráfica o pantalla que la calculadora muestra[12] en un documento de Word para compartir su exploración.

Así, su documento debe contener:

- Primera parte escrita a lápiz, donde se muestra el procedimiento.
- Segunda parte, donde se muestran las gráficas que evidencian sus exploraciones.

Tercera Guía de trabajo

Quiz en parejas para trabajar con el emulador

Las preguntas:

1. La ganancia derivada de la venta de x toneladas de sorgo está dada por la expresión: $P = P(x) = 30x-125-x^2$, donde P está dada en miles de pesos. ¿Cuántas toneladas de sorgo se deben vender para obtener la máxima ganancia?

   ¿Cuál es el valor de esta máxima ganancia?
2. Encuentre un valor de x tal que: $\mathrm{Ln}x = 2x -5$

9. Permite que el cursor se mueva sobre la representación gráfica de la función.
10. Ofrece en pantalla las coordenadas del punto donde está ubicado el cursor; en asocio con Trace da las coordenadas de puntos sobre la gráfica de la función.
11. La calculadora permite construir una representación tabular de la gráfica; la tabla se puede hacer "manualmente" dando valores para la variable independiente y la calculadora da el valor correspondiente de la variable dependiente o "automáticamente" en donde el usuario puede escoger el valor inicial a partir del cual la calculadora produce la tabla y también puede escoger la "distancia" entre los valores de la variable independiente. Esta característica es importante ya que permite refinar la búsqueda numérica de un valor específico, por ejemplo la solución de una ecuación trascendente que no se puede obtener mediante métodos algebraicos.
12. Esto se puede hacer muy fácil; se hace clic en el icono de la cámara fotográfica que se muestra en la parte superior derecha de la calculadora, después vaya al documento y pegue la gráfica o pantalla.

Cuarta Guía de trabajo

1. Encuentre los puntos en donde las dos gráficas dadas a continuación se interceptan.

   $y = 2x^3 - 9x^2$

   $y = 86x - 240$

2. Un objeto es impulsado hacia arriba usando un cañón, a un ángulo θ, 45< θ <90, con respecto a la horizontal y a una velocidad inicial de V_0 pies por segundo desde la base de un plano que hace un ángulo de 45º con respecto a la horizontal. Si omitimos la resistencia del aire, la distancia R que el objeto recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por:

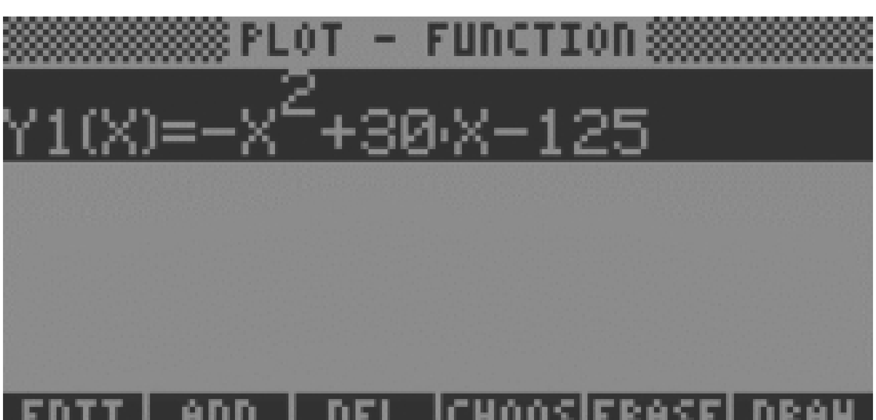
   $R = V_0 \sqrt{2} \cos\theta\ (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

Esto quiere decir que el alcance del proyectil depende del ángulo θ.

a. Dibuje la gráfica de la función anterior para una velocidad inicial V_0 de un metro por segundo.

b. Encuentre el ángulo que hace que el alcance del proyectil sea máximo. Recuerde que el problema representa una situación real y que debe interpretar la gráfica en términos físicos.

c. Encuentre dos valores para θ tales que el alcance correspondiente sea cero, explique el resultado físicamente, es decir, como debería ser orientado el cañón.



Resultados

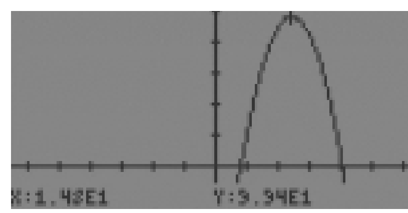
A continuación exhibimos una muestra de respuestas de dos estudiantes, con respecto a la tercera guía:

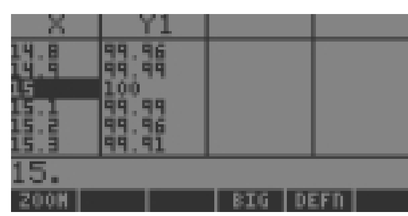
1. La ganancia derivada de la venta de x toneladas de sorgo está dada por la expresión: $P = P(x) = 30x - 125 - x^2$, donde P está dada en miles de pesos. ¿Cuántas toneladas de sorgo se deben vender para obtener la máxima ganancia?

Para obtener la máxima ganancia se deben vender 15 toneladas de sorgo.

¿Cuál es el valor de la máxima ganancia?

El valor de la máxima ganancia es de 100.000 pesos.

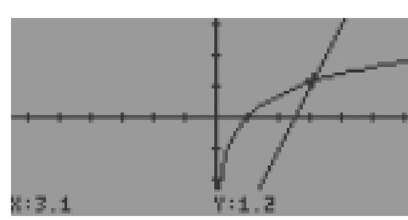


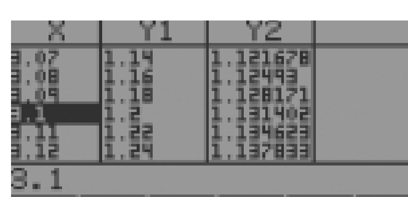


2. Encuentre el valor de x tal que: Lnx = 2x-5

   Ln(3.1) = 1.13

   2 (3.1) - 5 = 1.2





Las respuestas dadas por los estudiantes, tanto en el ejemplo mostrado como en los trabajos restantes, entre otros elementos, muestran que los estudiantes:

- Dan la respuesta al problema usando otros modos de representación, dado que no conocen la técnica del cálculo de las derivadas para encontrar el extremo.
- No hacen un refinamiento de la exploración numérica, y se conforman con el valor aproximado que encuentran.
- Para la segunda pregunta, hallan las coordenadas de la solución cuando se considera ésta como un punto en la pantalla de la calculadora localizado en las dos gráficas, sin embargo no exploran la existencia de otra solución, misma que se puede columbrar a partir de una "continuación" del trazo de las gráficas. Las exploraciones hechas por los estudiantes son limitadas en su propósito.
- Dan una respuesta "plana", sin comentar ni los procesos ni las respuestas ofrecidos.

Además:

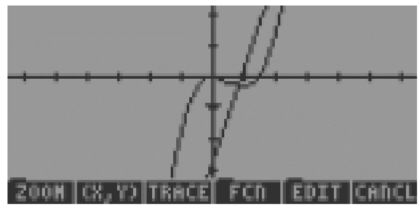
- No es evidente que los estudiantes, efectivamente, se percaten de las relaciones entre los diversos registros gráficos, simbólicos y numéricos presentes en el ejercicio.

Frente a las evidencias brindadas por los trabajos de los estudiantes y a las observaciones hechas por el docente durante las prácticas, se diseñaron otras actividades que brindaron la oportunidad a los estudiantes de dar respuesta en los términos propuestos por los objetivos de la indagación.

Ahora presentamos las respuestas a la primera pregunta de la cuarta guía:

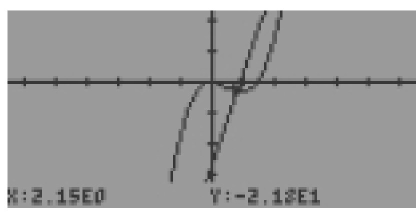
Graficamos las dos ecuaciones:

2 Encuadramos la gráfica.

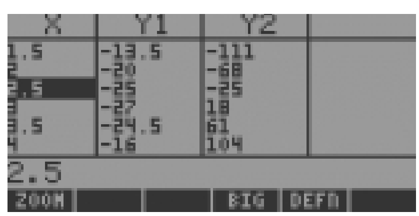


Aquí analizamos dónde se cortan las dos gráficas, con ayuda de Trace nos da idea. Después, vamos a la tabla.

La primera intersección nos da como sigue:

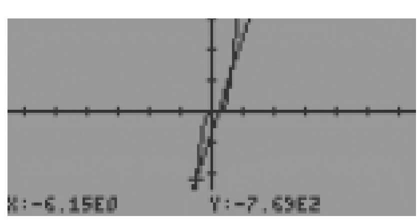


Ahora verificamos la tabla



Vemos que la primera intersección es en x = 2.5 y en y = -25

Verificamos si hay otra intersección.



Vemos que hay una aparente intersección en -6.15 en x y -769 en y

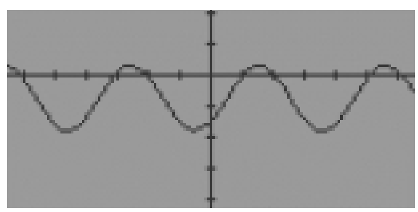
Verificamos con la tabla

Determinamos que hay intersección en x = -6 y en y = -756

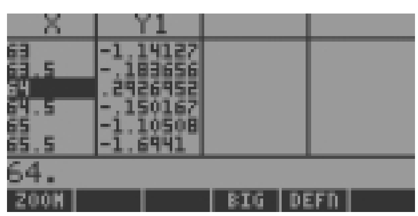
Para la segunda pregunta de esta guía las respuestas fueron:

Graficamos la función

Verificamos el gráfico



Ahora verificamos cuál es el valor máximo de y que nos representará a la distancia r

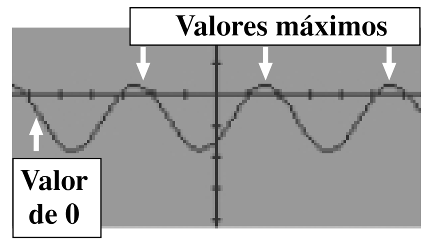


Vemos que el valor máximo se encuentra en el ángulo 64 grados.

Para ángulo 0.815, el alcance se aproxima a 0.

Para ángulo = a 60.425 el alcance se aproxima a 0.

Se concluye que el cañón debe ser orientado para su mayor alcance en un ángulo de -/+ 64 grados. Y para que el alcance sea 0 hay muchas posibilidades, que dependen de la posición en cada momento como se ha observado en la gráfica de la función.



En el desarrollo de esta Guía se puede observar:

- Uso de varias gráficas para validar las respuestas.
- Uso de refinamientos en la exploración numérica para verificar las soluciones.
- Relación entre los resultados de las exploraciones gráficas y numéricas. Un avance en las exploraciones numéricas y gráficas, por ejemplo, encontraron "la segunda solución" evento que no había sido considerado por los estudiantes en una primera instancia.
- Comentarios al procedimiento llevado a cabo.
- Interpretación de los resultados numéricos, en términos del problema físico planteado.

El tipo de respuesta mostrado aquí se repitió en los trabajos individuales de los otros estudiantes.

Resultados sobre las experiencias de aula

Al finalizar esta experiencia exploratoria y después de valorar la producción estudiantil frente a los objetivos y a las cuestiones planteadas en la indagación, frente a la presencia y uso de la calculadora en el aula de clase, podemos efectuar varias afirmaciones en relación con tres componentes de la experiencia: el docente, el estudiante y el conocimiento matemático puesto en juego.

El docente:

- Las tareas y actividades planteadas a los estudiantes ayudan a potenciar la configuración de los conceptos tales como dominio de la función, rango, solución de una ecuación.
- Solución de problemas no rutinarios.
- Los diversos sistemas de representación provistos por la calculadora ayudan de manera efectiva y comprobable a movilizar la argumentación en matemáticas, en tanto que al brindar otras formas de representación se abren otras posibilidades de aproximación a los conceptos y por tanto otras formas de "conocer". Sin embargo, es menester decir que el uso de varios sistemas de representación y el vínculo que se debe establecer entre ellos, los conceptos y los problemas presenta un reto tanto para los estudiantes como para el docente.
- En el tema de álgebra de expresiones algebraicas, la calculadora se pudo usar básicamente como elemento de verificación de resultados, lo cual no representa una ventaja desde el punto de vista de formación matemática.
- El tema de funciones es propicio y rico en situaciones aplicadas que favorecen el uso de la calculadora y sus varios sistemas de representación para el estudio de conceptos matemáticos. Este tema facilita la integración entre conceptos matemáticos, varios sistemas de representación, tecnología y problemas aplicados no rutinarios.
- El trabajo del docente se incrementa en atención al diseño de las actividades, con arreglo a fines y con la exigencia de preparar las exploraciones gráficas, numéricas y simbólicas que se requieren para orientar a los estudiantes en sus propias indagaciones.
- Las prácticas de los estudiantes deben ser observadas y registradas para determinar si las acciones de los estudiantes corresponden a los objetivos de la actividad y si las competencias que se desean poner en juego se hacen presentes en las actividades estudiantiles.
- El seguimiento de los errores de los estudiantes se torna más complejo, dado que en tanto que se incrementan otros modos de representación usados, se produce otra tipología de errores ajena a la experiencia del docente. Por ejemplo, la interpretación de información de carácter métrico y el uso de la pantalla de la calculadora como un "ábaco" ofrece una nueva gama de errores.
- El cumplimiento de cobertura diaria de los temas del programa del curso se retrasa, en tanto que los estudiantes, en principio, no tienen experiencia en el uso de la herramienta y posteriormente se tornan más inquisitivos y las exploraciones y tareas más exigentes en términos del tipo de respuesta que deben dar.

Los estudiantes.

- En la parte inicial de la experiencia, el uso que los estudiantes le dan al recurso tecnológico está orientado básicamente a *dar las respuestas que el profesor solicita,* esto se manifiesta en parte por el diseño de las Guías y el tipo de preguntas formulado, que buscan familiarizar a los estudiantes con las potencialidades técnicas de la calculadora.

- Posteriormente, y en especial en las últimas Guías, se hizo evidente que los estudiantes usan la calculadora como un instrumento para dar respuesta a los problemas y para explorar los conceptos en sus aspectos gráficos, numéricos y simbólicos.
- Al principio de la experiencia, los estudiantes muestran mucha dependencia del docente y piden aprobación para explorar, para cambiar las ventanas, para producir una tabla; posteriormente se muestran mas heterónomos en sus exploraciones y en el tipo de respuesta que dan.
- No objetan el uso del emulador, su experiencia en el uso del computador es de gran ayuda para ser usada con el emulador.
- Los estudiantes que participan poco en las clases y durante las sesiones de taller se muestran más activos durante las prácticas con el emulador.
- Los estudiantes valoraron la experiencia, ello se evidenció en una encuesta[13] que se aplicó al terminar el curso.

El conocimiento matemático

- La argumentación gráfica y numérica que el estudiante ofrece es más "coherente" con la evidencia disponible y provista por el instrumento; lo cual no ocurre cuando la argumentación es de carácter *simbólico* exclusivamente.
- El uso de varios sistemas de representación, los vínculos entre ellos y los conceptos matemáticos es, eventualmente, la dificultad más grande exhibida por los estudiantes.
- El estudiante puede dar respuesta a algunas cuestiones con ayuda de las gráficas y de las tablas, aun en ausencia de un procedimiento de carácter simbólico que verifique o refute los hallazgos.

En relación con la pregunta: *¿Es la significación obtenida con la ayuda de la calculadora lo suficientemente robusta de tal suerte que permita una construcción matemática conceptual sólida?*, no obtuvimos evidencia suficiente para soportarla afirmativa o negativamente. Creemos que es necesario efectuar un seguimiento de los estudiantes, durante un año, para dar una respuesta.

Los recursos físicos:

- El emulador es software de dominio público, así que puede ser fácilmente instalado en una sala de sistemas con ayuda de los operadores de las mismas, o copiado por los estudiantes en sus computadores.
- A través del Departamento de Multimedios, previa la reserva, se dispuso de una sala para ser usada en cada una de las ocasiones.
- El Departamento de Matemáticas dispone de dos calculadoras y de dos pantallas para ser usadas con un retroproyector y que favorece *el uso ilustrativo*[14] de la calculadora por parte del docente durante las clases.

El Grupo de Educación Matemática y Tecnología continuará explorando el uso de estas tecnologías en el aula, para determinar conjuntamente con los docentes del Departamento de Matemáticas, una metodología de uso y definir una práctica colectiva que apoye los esfuerzos de formación matemática y científica promovida por la Universidad y enfocada hacia los estudiantes.

Conclusión

Al concluir la experiencia, el Grupo de Educación Matemática y Tecnología, adscrito a la Facultad de Ciencias Básicas, pudo someter a la prueba de la realidad del aula de clase algunas de las afirmaciones pertinentes al uso de la calculadora y el computador en los procesos de formación matemática, además de recavar información valiosa que será la base para proponer una nueva fase de indagación.

Con base en el trabajo realizado podemos afirmar, a modo de conclusión, que:

- La calculadora es un instrumento interesante para poner en juego los varios sistemas de representación y su uso favorece el diseño de instancias en donde ellos ayudan a configurar los conceptos matemáticos, en tanto que ofrecen la posibilidad de aproximarse a los conceptos desde lo numérico y lo gráfico, modos de representación que están más cercanos a la experiencia sensorial estudiantil.
- La calculadora y el computador pueden ser introducidos de manera cuidadosa y su efecto en las prácticas estudiantiles debe ser estudiado, la calculadora no debe ser usada como reemplazo de competencias importantes que los estudiantes deben desarrollar, por el contrario, la calculadora debe ser usada como aliado para ofrecer a los estudiantes instancias de uso que promuevan el

13. La encuesta reposa en los archivos del Grupo de Educación Matemática y Tecnología del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas de la UAO.
14. Se define "el uso ilustrativo" de la calculadora como aquel en donde la calculadora se usa por el docente para ilustrar procesos, y como elemento para verificar y usar varios modos de representación.

desarrollo de competencias matemáticas de alto nivel.

- La calculadora y el computador imponen nuevos retos y presuponen un cambio en la postura epistemológica frente a las matemáticas y a lo que significa *educación o formación matemática*.
- La implantación de las calculadoras en el aula y su inclusión en el conjunto de prácticas docentes personales e institucionales, sólo puede darse en la medida que su uso se discuta y se produzca, colectivamente, un conocimiento didáctico en relación con su presencia en el aula.

Referencias

- Balacheff, N., Kaput, J. J. *Computer Based Learning environments in mathematics.* En A.J. Bishop, K Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (eds., 1996). International Handbook of mathematics education. Dordrecht: Kluwer, (p. 459-501).
- Bishop, A. *Review of Research on Visualization in Mathematics Education.* Massachusetts, Focus on Learning Problems in Mathematics vol. 11, No. 1, Winter 1989, (p. 1-5).
- Bruce, J.W., et al. *Microcomputers and mathematics.* Cambridge University Press, 1990.
- Carvalho, J. *¿Are Graphing Calculators the catalyzers for a real change in Mathematics Education?* En Gómez, P. y Waits B. (eds), Roles of Calculators in Classroom, una Empresa Docente & Name of Publisher, 21-30, E.U.A. 1996.
- Dubinsky, E., Tall, D. *Advanced mathematical Thinking and computer.* En David Tall (ed) Advanced Mathematic Thinking, Mathematics Education Library. Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Dunham Penelope GH(1993)." Does using calculators work". The jury is almost in".UME Trends,5(2) P(8,9)
- Godino J, Batanero C. *Marcos teóricos de Referencia sobre la cognición matemática.* Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación matemática". Disponible en http: // www.ugr.es/local/ jgodino
- Guzmán, M. *Tendencias innovadoras en la Educación Matemática.* Boletín de S.P.M., 25, 9-34. 1993.
- Heid, M. Kathleen. *Transformation of learning of algebra and calculus via computer tools.* 7th International Congress on Mathematical Education. Micro conference on calculators and computers, Quebec, Canada, 1992.
- Hercovies, N., Bergeron, J. A. *Constructivist vs. a formalist Approach in te Teaching of Mathematics.* PME 8TH conference, (p. 190-196). 1984.
- Hitt, E. F. *Intuición primera versus pensamiento analítico:* Dificultad en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. En Revista Educación Matemática., Vol. No. 1, México, abril 1995.
- Kaput, James J. *Technology and mathematics education.* Handbook of Research on Mathematics Teaching on Learning. Douglas A. Grows (ed). A protect on NCTM, 1992.
- Martín Socas. *La educación matemática en la enseñanza secundaria, Cuadernos de formación del profesorado.* ICE/Horsori, Universitat de Barcelona.
- Morris, Richard. *Computer Experiments in a course for mathematics teachers.* Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching. Vol. 11, No. 1, (p. 13 - 18). 1992.
- Moses, B. *Visualization: a problem - solving approach.* Canadá, Math Monograph, No. 7, abril, (p. 61 - 66).
- Pea, R. *Cognitive technologies for mathematics education.* En Shoenfeld A. (ed), Cognitive science and mathematics Education. Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum Associates. 1987.
- Socas, Martín. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Luis Rico(ED); *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp.125, 154). ICE. Institut de Ciéncies de Éducació. Universitat de Barcelona. 1997.
- Waits, B. K. *The power of visualization in calculus.* TICAP Project. 1996.